# COMPENDIO

DE

# GEOMETRÍA.

# COMPENDIO

DE

# GEOMETRÍA,

DISPUESTO

PARA USO DE LA JUVENTUD

Por Don José Giró,

PROFESOR DE PRIMERA EDUCACION.

Barcelona:

IMPRENTA DE PEDRO FULLÁ,

CALLE ALTA DE S. PEDRO, N.º 60.

1846.

# Prólogo.

*Reunir los principios necesarios y sus aplicaciones para que puedan servirse de ellos en las cosas de sus oficios aquellos que se circunscriben á la primera educacion, y dar algunas reglas nuevas, ya para simplificar la resolucion de algunos problemas, ya para resolver otros de bastante uso á las artes que se resistian á las reglas dadas hasta al presente, he aquí lo que me ha inducido á componer este tratado de Geometría.*

*Para lograr lo primero he procurado que todas las proposiciones y las consecuencias qus de ellas emanan fuesen indispensables para la comprension del tratado; suprimiendo aquellas que únicamente pueden servir para preparar el camino á aquellos que despues quieren dedicarse á las Matemáticas. No obstante, considerando que el raciocinio puede ser útil á toda clase de personas, no he dejado de aprovechar los casos en que me ha parecido oportuno introducir alguna demostracion fundada en los principios del presente tratado.*

*En cuanto á las innovaciones puede verse, entre otras,* la regla general para trazar toda especie de polígonos regulares. *Poco mérito prueba esta nueva regla, pero si se atiende á que las artes han de trazar continuamente esa especie de figuras no podrá ménos de reconocerse su utilidad.*

*Ningun lauro puede reportarme esta publicacion, pero si logro contribuir con mis escasas luces á mejorar en algo la educacion de mi Patria quedaré sobradamente recompensado de mi trabajo.*

# NOCIONES PRELIMINARES.

1.ª La *Geometría* es la ciencia que trata de la posicion, figurabilidad y relacion de la cantidad contínua.

2.ª Llámase cantidad *contínua* la que tiene sus partes trabadas unas con otras de modo que no se pueden separar sin hacer un esfuerzo: así son cantidades contínuas un tablon de 25 palmos, 7 varas indianas etc.: pues para tomar una parte del tablon habríamos de serrarlo, y para tomar una parte de la indiana se habria de cortar.

3.ª La cantidad contínua solamente es propia de los cuerpos *sólidos*, ó *geométricos*. Por cuerpo *geométrico* debe entenderse cualquier objeto que tenga la propiedad de ocupar espacio.

4.ª Todo cuerpo geométrico es estenso en tres *dimensiones* que se llaman *longitud*, *latitud* y *pro-*

*fundidad*: tomando por ejemplo este libro, la distancia que va del estremo superior al inferior de las páginas es la *longitud*, la distancia que va desde el estremo derecho al izquierdo es la *latitud* y el espesor de las hojas es la *profundidad* ó *grueso.*

5.ª La estension de un cuerpo se llama tambien *volúmen*; y aunque para constituirlo son indispensables las tres *dimensiones*, sin embargo por medio de la *abstraccion* podemos prescindir de una, de dos, y aun de lastres juntas. Así, si prescindimos del *grueso* de este libro solo quedará la estension en *longitud* y *latitud* que es lo que se llama *superficie*; si ahora prescindimos de la *latitud* quedará solo la idea de *longitud*, que se llama *línea*; y si prescindimos de esta longitud fijando solamente la atencion á los estremos de la línea no quedará absolutamente nada de la estension, y á esta idea se le llama *punto matemático.*

6.ª De lo dicho se infiere: 1.° que la *superficie* es la cara de los cuerpos y que no tiene nada de grueso. 2.° Que la *línea* no tiene nada de grueso ni de ancho, y por consiguiente es el *límite* de la superficie. 3.° Que el *punto* carece de toda dimension y es el límite de la línea.

# PRIMERA PARTE.

## De las líneas y de su posicion con respecto á nosotros.

1. Línea, como hemos visto, es el límite de la superficie ó lo que queda de un cuerpo haciendo abstraccion de dos dimensiones; si sus puntos están todos en una misma direccion la línea se llama *recta*, tal como la A B (fig. 1); si no están en una misma direccion se llama *curva*, tal es la A C B, y se llama *mixta* cuando se compone de recta y curva, como la E F G, que se compone de la parte E F que es recta y de la F G que es curva.

2. De la definicion de la línea recta y de la simple inspeccion de la figura se deduce: 1.º que dos puntos fijan la posicion de una recta; 2.º que de

un punto á otro no se puede tirar mas de una recta, pero curvas todas las que se quieran; pues saliendo del punto A para el punto B se puede ir por C, por D, etc.: 3.° que la recta es la mas corta de cuantas se pueden tirar desde un punto á otro: 4.° que la curva que mas se separa de la recta es la mas larga: 5.° que la distancia de un punto à otro se debe medir por medio de una recta, pues es la única que se puede tirar de su especie.

3. La línea recta con respecto á nosotros puede tener tres posiciones diferentes: la *horizontal*, la *vertical* y la *inclinada*. La horizontal es la que va de derecha á izquierda sin subir mas un estremo que otro; como la A D (fig. 2).: la vertical es la que va de arriba á bajo sin inclinarse ni hácia á la derecha ni á la izquierda, ó bien la que corta à la horizontal sin inclinarse mas á un lado que á otro; como la B E: y la inclinada es la que ni es horizontal ni vertical como la C O.

4. Entre la infinidad de curvas diferentes que podemos concebir, la Geometría elemental solo considerará la *circunferencia* de *círculo:* Esta es una curva reentrante en sí misma que tiene todos sus puntos equidistantes de otro que se llama *centro*; tal es la B D C E. (fig. 3.) El espacio cerrado por la circunferencia se llama *círculo*.

5. Una recta cualquiera tal como B C que pasando por el centro termine por ambos estremos á

la circunferencia se llama *diámetro*; y la que saliendo del centro va á terminar á la circunferencia se llama *rádio*; tal es la O D. De donde se infiere: 1.° que estando todos los puntos de la circunferencia á igual distancia del centro, todos los ràdios de un mismo círculo son iguales, pues miden distancias iguales: 2.° que el diámetro consta de dos rádios, y siendo éstos iguales tambien lo serán los diámetros.

6. Una porcion cualquiera de circunferencia se llama *arco* y la recta que va de un estremo á otro se llama *cuerda* del arco; asi la porcion F D G de circunferencia es un arco y la recta F G su cuerda. Adviértese que la F G tanto es cuerda del arco F D G, como del F E G; pero hablando de arcos se entiende de los menores.

7. Una línea que como la N A no tenga mas que un punto comun D con la circunferencia se llama *tangente* y el punto en que toca la circunferencia se llama *punto de contacto.*

8. Lo que debe saberse respecto de la circunferencia y de las rectas consideradas en ella es: 1.° Que el diámetro divide el círculo y la circunferencia en dos partes iguales llamada cada una de ellas *semicírculo*: 2.° que arcos iguales subtenden cuerdas iguales y cuerdas iguales subtenden arcos iguales: 3.° que la tangente es *perpendicular* al rádio que va desde el centro al punto de contacto: 4.° que la recta que sale del centro y es perpen-

dicular á una cuerda, divide ésta y el arco que subtende en dos partes iguales: 5.º que la línea que divide una cuerda en dos partes iguales y le es perpendicular, pasa por el centro.

Cuando dos circunferencias están trazadas desde un mismo centro se dice que son *concéntricas*; y el espacio conprendido entre las dos toma el nombre de *ánulo* ó *corona.*

Advertencias. 1.ª No se han puesto las circunferencias concéntricas porque es fácil de entenderlo sin la figura, y lo mismo se ha hecho en todos los casos que no ofrecen mucha dificultad á fin de economizar las figuras. 2.ª Los Profesores presentarán las figuras despejadas sin mas líneas que las necesarias para lo que quieran dar á conocer.

## De la posicion de las líneas con respecto á otras.

9. Una línea recta puede tener tres posiciones diferentes con respecto á otra recta: 1.º puede ser *perpendicular*; 2.º *oblicua*; 3.º *paralela.* Porque dos rectas tiradas en un mismo plano, ó se encuentran ó se encontrarian si se prolongasen; ó bien no se encuentran ni se encontrarian por mas que se

prolongasen: si se encuentran ó la una cae sobre la otra sin inclinarse mas hácia á un lado que á otro, del mismo modo que la vertical corta á la horizontal, ó bien se encuentran inclinándose la una á la otra.

Cuando se encuentran sin inclinacion se llaman *perpendiculares*, cuando se encuentran con inclinacion se llaman *oblícuas* y cuando no se pueden encontrar por mas que se prolonguen se llaman *paralelas*. La E F (fig. 4) es perpendicular á la C D, la H G, le es oblícua y la A B le es paralela.

10. Llámase *ángulo* á la abertura formada por dos líneas que se encuentran en un punto llamado *vèrtice* del *ángulo* y las líneas que lo forman se llaman *lados*.

11. El ángulo con respecto á sus lados puede ser *rectilíneo*, *carvilíneo* y *mixtilíneo*; segun sus lados son dos líneas rectas, como el A C B (fig. 5); ó una recta y una curva como el C A B (fig. 1) ó ó bien dos curvas como el D A C.

12. Los dos ángulos formados por una perpendicular y la línea á que lo és se llaman *rectos*, y los formados por una oblícua se llama *oblícuos*; siendo *obtuso* el que vale mas de un recto y *agudo* el que vale menos. Los ángulos A O B y B O D (fig. 2.) formados por la B O y A D son rectos, y los A O C y C O D oblícuos, siendo obtuso el primero y agudo el segundo.

13. El *complemento* de un ángulo es lo que le sobra ó le falta para valer un recto, y el suplemento es lo que le falta para dos rectos: así el ángulo B O C es complemento por exceso del A O C y lo es por defecto del D O C; y el D O C es suplemento del C O A y este lo es del D O C.

Infiérese de aquí. 1.° que dos ángulos que tengan complementos iguales y ambos sean por exceso ó por defecto, son iguales: 2.° que tambien lo son los que tienen suplementos iguales: 3.° que los dos ángulos que forma una línea que cae sobre otra de un modo cualquiera, el uno es suplemento del otro y por consiguiente los dos juntos valen dos rectos: 4.° qne conociendo el valor de un ángulo se puede buscar el complemento, restándole el valor de un recto si es obtuso, y quitándole del valor de un recto si es agudo; y para buscar el suplemento se restará el valor del ángulo de dos rectos: 5.° que dado el complemento ó suplemento se puede venir en conocimiento del ángulo, sumando ó restando del valor del ángulo recto el complenento segun éste sea por exceso ó por defecto; y en cuanto al suplemento se restarà de dos rectos: 6.° que todos los ángulos rectos son iguales.

14. La medida de un ángulo es el arco trazado desde su vértice entre sus lados. Para espresar numéricamente la cantidad de un arco, se considera dividida la circunferencia en 360 partes igua-

les llamadas *grados*; cada grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas *minutos*; el minuto tiene 60 *segundos*; etc. Para señalar los grados se usa de esta señal (°), para los minutos ( ′ ), para los segundos (″) etc.; así para espresar que un arco vale $^{48}/_{360}$ y $^{14}/_{60}$ de otra parte de la circunferencia lo escribirémos de este modo, 48° 14′ que se lee 48 grados 14 minutos.

Esto supuesto, para medir un ángulo se coloca el semicírculo de modo que el centro del círculo coincida con el vértice y el diámetro con un lado del ángulo que se quiere medir; y contando el número de grados que van hasta al otro lado se tiene el valor del ángulo propuesto.

15. Si se prolonga uno de los lados de un ángulo por la parte del vértice, en este punto se formarán dos ángulos que se llaman ángulos *contiguos* ó *adyacentes*; tales son los B C A (fig. 5) y A C E.

16. Cuando dos lineas se cruzan, en el punto en que lo hacen forman cuatro ángulos que de dos en dos se llaman opuestos al vértice y son iguales; En la (fig. 6) los ángulos A O C y B O D son opuestos al vértice y por consiguiente iguales, y tambien lo son los A O B y C O D.

17. Los ángulos que deben considerarse en el círculo son los *inscritos* y *centrales*. Los inscritos son los que tienen su vértice en la circunferencia como el C B D y el C B A (fig. 7) los cuales tienen por

medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados; y centrales son los que tienen su vértice en el centro del círculo como el C O G, los cuales tienen por medida el arco comprendido entre sus lados: así, la mitad del arco C G D es la medida del ángulo inscrito C B D y el arco C *n* G es la medida del ángulo central C O G.

De aquí se deduce: 1.° que todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto no pueden valer mas ni menos que la circunferencia entera ó 360 grados: 2.° que todos los ángulos que pueden formarse en un punto y á una misma parte de una línea no pueden valer mas ni menos de 180.°: 3.° que cada ángulo recto vale un cuadrante ó 90.°

18. Una de las principales propiedades de las perpendiculares, es que tienen todos sus puntos equidistantes de otros dos de la línea á que lo son: y cuando un punto de una perpendicular dista igualmente de dos puntos de la línea á que lo es, todos los puntos de la primera estarán á igual distancia de dichos dos puntos de la segunda: así, si el punto C (fig. 8) de la perpendicular C D está á igual distancia de *e* que de *f* lo mismo sucederá con el punto O. D. etc.

Problema 1.° Desde el punto A (fig. 9) bajar una perpendicular á la B C.

Para esto hágase centro en A con un rádio cualquiera v. g. A *d*, y córtese la B C en *d* y en *e*, haciendo ahora centro en *d* y en *e* con un rádio mayor que medio *de* trácense dos arcos que se crucen en *o*; por el punto A y por el punto de interseccion de los arcos tírese la A O la cual será la perpendicular pedida.

Esto se funda en que el punto O y el punto A estan equidistantes de *d* que de *e* pues que las distancias se han tomado con el compas.

Problema 2.° En el punto N. de la recta B C levantar una perpendicular.

Haciendo centro en N. con un rádio cualquiera, córtese la B C en *d* y en *e*, desde *d* y *e* trácense dos arcos que se crucen por arriba ó por abajo, segun la perpendicular haya de ir desde el punto N para arriba ó para abajo; por el punto N y por el punto de interseccion de los arcos tírese la recta N A ó la N O, la cual será la perpendicular pedida.

Si se hubiese de levantar una perpendicular al estremo de una línea, se prolongaria ésta y se resolveria el problema como el anterior.

Problema 3.° Al estremo C de la recta B C que no se puede prolongar levantar una perpendicular.

Desde un punto cualquiera *g* fuera de la recta trácese una circunferencia que pase por el estremo C: por el punto *a* en que la circunferencia corta a la B C y el centro *g* tírese el diámetro *am*: por el punto *m* y por el estremo C tírese la *m* C y se tendrá la perpendicular pedida.

La resolucion de este problema se funda en lo dicho (17).

La línea H G (fig. 4) que corta las dos paralelas se llama *secante*; la cual forma con las paralelas ocho ángulos, cuatro *esternos* y cuatro *internos*. Los esternos son los que están fuera de las paralelas y los internos los que están dentro: los A J H, H J B, C L G y G L D son esternos, y los A J G, G J B, C L H y H L D son internos.

Cuando se comparan dos ángulos esternos, uno en cada paralela y á distinto lado de la secante se llaman ángulos *alternos esternos*, tales son A J H y G L D., H J B y G L C. Cuando se comparan dos ángulos internos uno en cada paralela y á diferente lado de la secante se llaman ángulos *alternos internos*, tales son A J G y H L D, B J G y C L H. Cuando se comparan dos ángulos uno de esterno y otro de interno, uno en cada paralela y á un mismo lado de la secante se llaman ángulos *correspondientes*, tales son A J H y H L C, A J G y G L C, H J B y H L D, B J G y G L D.

21. Tocante á las paralelas debe saberse: 1.° que los ángulos alternos-esternos son iguales: 2.° que los alternos—internos tambien lo son: 3.° que lo mismo sucede con los correspondientes: 4.° que si dos líneas cortadas por una secante forman los ángulos alternos—esternos, ó los alternos—internos ó los correspodientes iguales dichas líneas son paralelas; y sino los forman iguales no lo son: 5.° que

una línea que sea perpendicular á una de dos paralelas tambien lo es á la otra: 6.º que dos perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.

Problema. Por un punto M fuera de la recta C D hacer pasar una paralela a ésta recta.

Desde el punto M bájese una perpendicular M F á la C D, (18 probl. 1.º) y en el mismo punto M levántese la perpendicular M B á esta última recta la cual será la paralela pedida.

22. En cuanto á los ángulos se pueden resolver los siguientes problemas.

Problema 1.º En el estremo C de la recta C B (fig. 5) formar un ángulo de 30 grados.

Póngase el semicírculo de modo que su diámetro se ajuste con la C B y que el centro coincida con el punto C: búsquese el grado treinta en el semicírculo y señálese en el papel por medio de un puntito; por este punto y por el punto C tírese la A C y quedará formado el ángulo A C B de 30 grados.

Problema 2.º En el estremo O de la recta O N formar un ángulo igual al A C B.

Haciendo centro en C con un rádio cualquiera trácese el arco *acb*, haciendo centro en O con el mismo rádio trácese el arco indefinido *nu*: tómese la cuerda *ab* del arco *acb* y haciendo centro en *n* con la misma avertura de compás córtese el arco *nu* en *m*: por el punto O y por el punto *m* tírese la M O y se tendrá el ángulo M O N igual al propuesto.

# Sumar, restar, multiplicar y dividir líneas y ángulos.

23. Para sumar las rectas se toma la longitud de cada una de ellas con el compás y se colocan estas longitudes unas á continuacion de otras encima una recta indefinida de lapiz, y cuando están todas puestas en dicha línea se borra la porcion que queda, y queda concluida la operacion. V. g.

Problema. Búsquese una recta igual á la suma de las A D, B E y C O (fig. 2).

Tirada la línea indefinida N M, tómese con el compás la A D y póngase de N á *c*; tómese la B E y póngase de *c* á *d*; hágase lo mismo con la O C y póngase de *d* á *e*; pásese de tinta la porcion N *e* la cual será la suma pedida.

24. Para sumar los ángulos se tira una recta y desde uno de sus estremos se traza un arco indefinido y que tenga un estremo en dicha linea: haciendo centro en cada uno de los vértices de los ángulos sumandos y con el mismo rádio que se ha trazado el arco indefinido, se trazan arcos entre sus lados: se toman las cuerdas de estos arcos y se van colocando

unas á continacion de otras en el arco indefinido, empezando por el estremo que toca la línea, y tirando una recta desde el estremo, en donde se ha hecho centro para trazar el arco indefinido, al punto de este arco que esprese la suma de los arcos de los sumandos se tendrá un ángulo que será la suma de los otros dados. V. g.

Problema. Buscar un ángulo que sea igual á la suma de los A C B y M O N. (fig. 5)

Tírese la recta D E y haciendo centro en D con un rádio D*e* trácese el arco indefinido *chg* y con el mismo rádio desde los vértices C y O de los ángulos sumandos trácense los arcos *acb* y *nom*; tómese la cuerda *ab* del arco *acb* y colóquese de *e* á *h*; tómese en seguida la cuerda *nm* del arco *nom* y póngase de *h* á *f*: por el punto D y por el punto *f* tírese la F D y quedará formado el ángulo E D F igual á la suma de los dos ángulos propuestos.

Nota: que si la suma llegase á valer 180 grados seria imposible la operacion, porque un ángulo no puede llegar á este número de grados.

25. Para restar una línea de otra ó para buscar la diferencia entre dos rectas dadas, tírese la indefinida (23) y póngase sobre de ésta y desde un mismo estremo la longitud de cada una de las dos cuya diferencia se quiere hallar, y la distancia que medie entre las dos divisiones es la diferencia que se busca. V. g.

Problema. Cual es la diferencia entre la N*e* (fig. 2) y la A D?

Desde el estremo N de la indefinida N M póngase la $Ne$, como ya lo está, y desde el mismo estremo póngase la A D: ahora la $Ne$ corta en $e$ la indefinida y la A D la corta en $c$, luego la distancia $ce$ que media entre los dos puntos de division es la diferencia.

2.º Problema. Pídese el resultado de A B + C D + F E + G H (fig. 4) — B C — $Cm$ — $Ao$ (fig. 9).

Súmense las rectas que tienen el signo mas, separadamente las que tienen el signo menos; búsquese la diferencia entre estas dos sumas y ésta será el resultado.

26. La misma diferencia que vá de sumar á restar líneas es la que va de sumar á restar ángulos. Así como para sumarlos se suman las cuerdas de sus arcos trazados con un mismo rádio, para restarlos se restan las cuerdas de sus arcos. V. g.

Problema Buscar la diferencia que hay entre los ángulos E D F y A C B (fig. 5)

Tírese la recta O N, trácense los arcos $ehf$ y $nmu$ (24.); tómese la medida del arco $ehf$ y póngase de $n$ á $f$: hágase lo mismo con el arco $acb$ y póngase de $f$ á $m$: por este punto y por el punto O tírese la M O la cual formará un ángulo con la O N que será la diferencia buscada.

27. En la multiplicacion de las rectas pueden ocurrir dos casos: buscar una recta que sea un cierto número de veces mayor que otra dada, y multiplicar una recta por otra. En el primer caso no hay nada que hacer sino poner la recta que se ha de multipli-

car encima una indefinida; el número de veces por el cual se ha de multiplicar; pero para multiplicar una línea por otra es menester medir la longitud de cada una, lo que se consigue por medio de una escala.

28. Para construir una escala se tira una recta A B (fig. 10) y desde A se toman las distancias iguales A 1, 1. 2, 2. 3 etc. hasta un número determinado de veces que en nuestro caso es diez: despues se toman estas diez partes juntas y se van poniendo desde el 10 para arriba, poniendo el número 20 á la primera division, el 30 á la segunda, el 40 á la tercera etc.

Problema. Buscar una recta que sea igual al producto de la A D $\times$ B C (fig 6).

Tómese con el compas la longitud de la A D y póngase en la escala de A hácia B para ver cuantas partes coje, y se hallarán 6, 8 á poca diferencia; hágase lo mismo con la B C y se hallará que tiene 8 partes: multiplíquese el 6,8 por el 8 y el producto 54,4 espresará las partes que debe tener la línea que se busca. Para tirarla no hay mas que tirar una indefinida, y tomando en la escala las 54,4 partes, póngase en la indefinida y pásese de tinta esta distancia la cual será la línea buscada.

29. En cuanto á los ángulos tambien puede suceder que se hayan de hacer un cierto número de veces mayor, y que se haya de multiplicar un ángulo por otro.

Para hacer un ángulo un cierto número de veces mayor que otro dado, despues de haber tirado una recta y trazado desde uno de sus estremos un arco indefinido y con el mismo rádio haber trazado un arco entre los lados del ángulo dado, tómese la cuerda de este arco y póngase encima el arco indefinido tantas veces como el ángulo ha de ser mayor; por el estremo de la línea desde donde se ha trazado el arco indefinido y por el punto de la última division de este arco tírese una recta, la cual formará con la otra recta un ángulo que será el pedido.

30. En la division de las líneas, lo mismo que en la de los ángulos, debe saberse, que si se han de dividir por dos ó por un múltiplo de dos se hace la operacion por medio de perpendiculares, y sino es dos ni un múltiplo de dos el número por el cual se han de dividir se resuelve por medio de paralelas.

Problema. Dividir la A B (fig. 11) en 4 partes iguales.

Haciendo centro en B trácese un arco por arriba y otro por abajo, y desde A con la misma abertura de compas córtense en *c* y en *d*; tírese la *cd* la cual cortará á la A B por el medio y por consiguiente quedará dividida en dos partes A 2, y 2 B iguales: considerando cada una de estas dos partes como una línea divídase en dos partes iguales del mismo modo que se ha hecho para dividir toda la A B y se tendrá esta línea dividida en cuatro partes B 1, 1.2, 2.3, y 3.4 iguales. Esto se funda en lo dicho (18); pues teniendo la *cd* el punto *c* equidistantes de A que de B le será perpendicular y por consiguiente el puuto 2 estará á igual distancia de A que de B; luego A2 = 2 B, Lo mismo se diria de las *eo* y *pr*.

Si se hubiéra de dividir en 8 partes iguales, cada una de las cuatro partes se dividiria en dos; si se hubiera de dividir en 16, cada una de las ocho que saldrian se dividiria en dos, y asi sucesivamente.

31 Para dividir una línea en un múmero cualquiera de partes iguales se tira una línea al estremo de la que se quiere dividir, con la cual ha de formar un ángulo cualquiera; y partiendo del vértice de este ángulo se toman tantas partes iguales en la recta que se ha tirado, cuantas son las en que se quiere dividir la recta propuesta, y se une el estremo de esta recta con la última division de la otra, por medio de otra recta; desde la penúltima division se tira una paralela (21 probl.) à esta última recta la cual va à cortar la recta propuesta en un punto, cuya distancia con el estremo de la línea es la magnitud de una parte de las en que ha de dividirse la línea.

Problema. Dividir la A B (ìg. 12) en 7 partes iguaes.

Desde A tírese la A C, y tomando con el compas una distancia cualquiera V. g. A1 póngase 7 veces de A para C; únase el punto 7 con el punto B por medio de la B 7, y por el punto 6 tírese una paralela D 6 à la B 7, la cual encontrarà à la A B en D: la distancia B D es la longitud de una parte, la cual repetida 7 veces encima la A B dejarà esta recta dividida en las 7 partes iguales que se pedian, como lo presenta la figura.

32. En cuanto á la division de los àngulos no hay mas que dividir las cuerdas del mismo modo que se han dividido las otras línces y por los puntos de division tirar líneas al vértice.

## De las figuras.

33. Se llama figura un espacio cerrado por líneas. Si estas líneas son rectas la figura se llama rectilínea; si son curvas curvilínea; y si se componen de rectas y curvas mixtilíneas.

Si la figura consta de tres lados se llama *triángulo*; si consta de cuatro, *cuadrilátero*; si de cinco *pentágono*, si de seis *exágono*; y asi sucesivamente, *eptágono*, *octógono*, *eneágono*, *decágono*: pero cuando pasa de diez lados es mejor decir una figura de once, de quince, de treinta lados.

Las figuras que pasan de cuatro lados se les suele dar en general el nombre de *polígonos*.

34 Las figuras pueden ser regulares é irregulares. Se llaman regulares las que tienen todos sus lados y àngulos iguales é irregulares las que carecen de alguna de estas circunstancias.

35. El triàngulo regular se llama *equilátero*; y el irregular isóceles ó *escaléno*. Se llama isóceles el que

tiene dos lados iguales y el tercero desigual, y escaleno el que no tiene ningun lado igual. El A B C (fig. 13) es equilátero, el D E F (fig. 14) isóceles, y el G H J (fig. 15) escaleno.

Con respecto à los àngulos, el triàngulo los puede tener todos tres agudos, ó dos agudos y uno recto; ó bien dos agudos y uno obtuso. En el primer caso el triángulo se llama *acutángulo*, en el segundo *rectángulo* y en el tercero *obtusángulo*. Lòs lados que forman el àngulo recto del triángulo rectàngulo se llaman *catetos* y el que le cierra *hipotenusa.*

Se llama *base* de un triàngulo el lado sobre el cual se considera insistiendo, y *altura* la perpendicular tirada desde el vértice opuesto à la base ó á su prolongacion; pero en el isóceles se toma por base el lado desigual. Asi A C, D F y J H son las bases, y las Ba, Ea y Ga son las alturás de los tres triànglos (fig. 13 14, 15)

36 Dos triàngulos son iguales; 1.° cuando tienen sus tres lados igualee; 2.° Cuando tienen dos lados iguales é igual el àngulo comprendido entre estos lados 3.° Cuando tienen un lado igual é iguales los àngulos adyacentes à este lado.

37 Si desde el vértice del àngulo opuesto al lado desigual de un triàngulo isóceles, V. g. D E F (fig. 14) se baja una perpendicular E*a* à la base, ésta queda dividida en dos partes iguales; y si la divide en dos partes iguales le es perpendicular (8. 4.° y 5.°)

38. Los tres àngulos de un triángulo cualquiera

juntos valen dos rectas ó 180 grados. De donde se infiere: 1.° que dados dos àngulos de un triàngulo se puede hallar el tercero restando la suma de los dos àngulos de 180 grados: 2.° que dos triàngulos que tengan dos àngulos iguales tambien los tienen los terceros: 3.° que en un triángulo rectangulo los otros dos ángulos han de ser agudos: 4.° que con mas razon deben ser agudos los dos ángulos de un triángulo obtusángulo.

39. Con respecto á los triángulos importa tambien saber: 1.° que en un mismo triángulo ó en triángulos iguales á lados iguales se oponen ángulos iguales, y viceversa, á ángulos iguales se oponen lados iguales: 2.° que en un mismo triángulo ó en triángulos iguales á mayor lado se opone mayor àngulo y viceversa, à mayor àngulo se opone mayor lado: 3.° que à menor lado se opone menor àngulo y viceversa: 4.° que si se prolonga uno de los lados de un triàngulo el ángulo esterno es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos.

40. Con lo que se acaba de decir será muy fácil de entender: 1.° que de todas las líneas que se pueden tirar desde uu punto à otra línea, la perpendicular es la mas corta: 2.° que las oblícuas que distan igualmente de la perpendicular son iguales: 3.° que la oblícua que mas dista de la perpendicular es la mas larga.

Concíbase desde el punto B (fig 13) á la O C tiradas la perpendicular Ba y las oblícuas B C, B A y

B O, de modo que las B C y B A esten à igual distancia de la B*a*, lo que darà *a*C=*a*A. Por ser la B*a* perpendicular à la O C los triàngulos C B*a* y *a* B A seràn rectángulos en *a*, y por consiguiente tienen los otros àngulos agudos; luego el lado A B que se opone al àngulo mayor, serà mayor que la B*a* que se opone à un àngulo menor, y lo mismo sucede con la B C. Los triàngulos C B*a* y *a* B A tienen el lado B*a* comun, el *a*C igual al *a*A, y los àngulos en *a* iguales, luego (36 2.º) son iguales y daràn B C = B A. El àngulo O A B es obtuso porque es esterno del triàngulo rectàngulo *a* B A no siendo contíguo al àngulo recto; por consiguiente el triàngulo A B O es obtusàngulo; lo que darà el lado B O opuesto al àngulo obtuso mayor que el B A.

Problema 1.º Dados tres lados construir el triángulo.

Resolucion. Sobre una recta indefinida tómese uno de los lados, y haciendo centro en cada uno de los estremos de este lado, en el uno con un ràdio igual à uno de los dos lados que quedan y en el otro con el lado restante, tràcense dos arcos que se crucen; desde el punto de interseccion de estos arcos tírese una recta à cada estremo del lado y quedarà construido el triàngulo. V. g.

Si nos dicen los lados H J, G H y J G (fig. 15) tiraríamos la indefinida H*a* y desde H colocaríamos el lado H J; despes haciendo centro en H con un ràdio igual al lado H G trazaríamos un arco, y haciendo centro en J con un ràdio igual al otro lado J G le cortaríamos en G; desde este punto G de interseccion tiraríamos las G H y G J à los estremos del lado H J y tendrìamos el triàngulo G H J.

Problema 2.º Dados dos lados y el àngulo comprendido entre ellos formar el triàngulo.

En el estremo de una recta indefinida fórmese un àngulo igual al dado (22 problemas 1.º y 2.º); tómeseun lado y póngase desde el vértice del àngulo à uno de sus lados, tómese el otro lado y póngase desde el vértice al otro lado del àngulo; por los dos puntos señalados en los lados del àngulo tìrese una recta la cual completarà el triàngulo pedido. V. g.

Supongamos que se dan los lados *a*C y *b*C (fig. 5) y el àngulo formado por ellos el *aCb*: en el estremo O de la indefinida N O se formarà un àngulo N O M igual al dado *aCb*; se tomarà el lado *aC* y se pondrà de O à *n* y el *bC* se pondrà de O a *m*; desde el punto *n* al punto *m* se tirarà la recta *n m* y quedarà resuelto el triàngulo *m* O *n*.

Problema 3.º Dado un lado y los dos àngulos contíguos à este lado formar el triàngulo.

En un estremo del lado dado fórmese uno de los dos àngulos dados, y en el otro estremo fórmese el otro àngulo; prolónguense los dos lados hasta que se encuentren con lo cual quedarà resuelto el triàngulo V. g.

Si se da el lado H J. (fig. 15) y los àngulos contiguos á él han de ser el uno de 122 grados y el otro de 23, en el estremo J, formarémos el ángulo G J H de

122 grados (22 problema 1.º) y en el estremo H el G H J de 13; se prolongarán los dos lados J G y H G hasta que se encuentren en G y se tendrá el triángulo G J H resuelto.

Problema 4.º Dado el lado A C (fig. 13) de un triángulo equilátero construir el triángulo.

Haciendo centro en A con un rádio A C trácese un arco, y haciendo centro en C con el mismo rádio córtese; por el punto de interseccion de estos dos arcos, que será en B, y por los estremos del lado tírense las B A y B C y se tendrá el triángulo B A C pedido.

Problema 5.º Dada la base F D (fig. 14) de un triángulo isósceles y un lado E D de los dos iguales construir el triángulo.

Haciendo centro en cada uno de los estremos D y F de la base, y con un rádio igual al lado E D, trácense dos arcos que se crucen en E; por este punto de interseccion y por los estremos D y F tírense los E D y E F y quedará construido el triángulo E D F.

Problema 6.º Dada la base de un triángulo isósceles y uno de los dos ángulos iguales que se forman en ella construir el triángulo.

En cada uno de los estremos de la base fórmese un ángulo igual al dado; prolónguense los dos lados hasta que se encuentren y quedará resuelto el triángulo.

Si se da la base D F, y que uno de los ángulos iguales que se forman en la base sea de 65 grados, se formará en el estremo D un ángulo E D F de 65 grados (22 Problema 1.º) y se hará lo mismo en el estremo F; se prolongarán los lados E D y E F hasta que se encuentren, lo cual lo harán en E, y quedará resuelto el triángulo E D F.

Problema. 7.° Dada la base de un triángulo isóceles y el ángulo opuesto á ella construir el triángulo.

Réstese el ángulo dado de 180 grados y la diferencia divídase por dos: fórmese á cada uno de los estremos de la base un ángulo de tantos grados como diga la mitad de la diferencia, y prolongando los dos lados hasta que se encuentren se tendrá construido el triángulo. V. g.

Si se conoce la base D F de un triángulo isóceles y el ángulo D E F de 50 grados, opuesto á la base, se resolverá el triángulo de este modo: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, esta diferencia dividida por 2 da 65.°; se formará un ángulo en D y otro en F de 65.° cada uno, y prolongando los lados D E y F E hasta que se encuentren, lo cual sucederá en E, se tendrá el triángulo D E F construido.

41 El cuadrilátero puede ser regular é irregular como las demas figuras. El regular se llama *cuadrado* y el irregular *rectángulo, rombo, romboide, trapecio*, ó *trapezoide*. El *rectángulo* es el que tiene sus cuatro ángulos rectos; pero los lados que forman un mismo ángulo desiguales; el *rombo* es el que tiene sus cuatro lados iguales, pero sus ángulos desiguales; el *romboide* es el que tiene sus ángulos desiguales, pero sus lados opuesto iguales; el *trapecio* es el que tiene sus ángulos y lados desiguales, pero dos lados

paralelos; y el *trapezoide* es el que tiene sus ángulos y lados desiguales, sin tener ningun lado paralelo. La A B C D (fig. 17) es un cuadrado, la fig. 16 un rectángulo, la fig. 18 es un rombo, la fig. 19 es un romboide, la fig. 20 es un trapecio y la fig. 21 un trapezoide.

Por base de estas figuras se entiende el lado sobre el que se considera insistiendo, y por altura la perpendicular tirada á la base ó à su prolongacion desde el punto mas alto de la figura; asi la D C (fig. 16, 17, 18, 19, 20 y 21) es la base y la A *l* (fig. 18, 19, 20 y 21) la altura: en el *cuadrado y rectángulo* considerando la D C por base la A D es la altura. La línea que va desde el vértice de un ángulo á su opuesto, como la B D, se llama *diagonal.*

42. Los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos se les da el nombre de paralelógramos; y de esta especie lo son, el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide, como vamos á ver.

1.° Tirando la diagonal DB en el cuadrado (fig. 17) se tendrán los triángulos A B D y C B D que tienen los lados B A. y A D del uno iguales á los B C y C D del otro (41) y el B D comun, luego teniendo sus tres lados iguales serán (36. 1.°) iguales, y darán el ángulo C B D igual al ADB, pero estos ángulos son alternos internos entre las rectas A B y D C siendo la secante B D, luego se tendrá que la A B sera (21 .4.°) paralela á la D C; pero estos ángulos no solo son alternos—internos entre las paralelas A B y D C si que tambien lo son entre las rectas A D y B C, luego tambien son paralelas y la figura un paralelógramo.

2.º En el rectángulo (fig. 16) las A B y D C son perpendiculares á la B C por formar ángulo recto con esta línea, (41) luego serán (21..6.º) paralelas: las A D y B C por la misma razon son perpendiculares á la D C y por consiguiente paralelas entre si, luego la figura es un paralelógramo.

3.º Tirando la diagonal B D en el rombo (fig. 18) se tendran los triángulos D A B y B C D que tienen los lados A B y A D del uno iguales á los C B y C D del otro, (41) y el B D comun, luego son (36.. 1º) iguales, y darán el ángulo C B D igual al A D B; pero estos ángulos son alternos-internos entre las rectas A B y D C siendo la secante la B D, luego esas dos líneas son (21.. 4º) paralelas; pero estos ángulos no solo son alternos internos entre las paralelas A B y D C si que tambien lo son entre las rectas A D y B C, luego estas dos líneas tambien son paralelas y la figura un paralelógramo.

4.º La B *D* (fig. 19) divide el romboide en dos triángulos B A *D* y *D* C B que tienen el lado A B del uno igual al D C del otro, (41) y el A D igual al B C; y el B D comun, luego estos triángulos son iguales y por consiguiente darán el ángulo C B D igual al A D B; pero estos ángulos son alternos—internos entre las A B y D C siendo la secante B D; luego esas dos líneas son (21..4.º) paralelas; pero estos ángulos no solo son alternos internos entre las paralelas A B y

D C, si que tambien lo son entre las rectas A D y B C luego estas líneas tambien son paralelas y la figura un paralelógramo.

43. Por lo que precede se ve claramente: 1.º que la díagonal de un paralelógramo cualquiera le divide en dos triángulos iguales: 2.º que los cuatro ángulos de un cuadrilátero cualquiera juntos valen cuatro rectos ó 360 grados: 3.º que dos paralelógramos son iguales cuando tienen dos lados igualos é igual el ángulo formado por ellos: 4.º que un cuadrado queda determinado cuando se conoce un lado: 5.º que un rombo queda determinado cuando se conoce un lado y uno de sus ángulos: 6.º que un romboide queda determinado cuando se conocen dos lados y el ángulo formado por ellos: 7.º que un trapecio ó un trapezoide queda determinado cuando se conocen tres lados y los dos ángulos formados por ellos.

Problema. 1.º Dado un lado de un cuadrado trazar la figura.

Fórmese un àngulo recto y hàganse sus lados iguales al lado del cuadrado, y haciendo centro en cada estremo de los lados del àngulo y con un ràdio igual al lado del cuadrado trácense dos arcos que se crucen; por el punto de interseccion y por los estremos de los lados del ángulo tírense líneas y quedará resuelto el problema. V. g.

Conociendo el lado D C (fig. 17) resolver el cuadrado.

En el punto C formarémos el àngulo recto D C B, y harémos sus lados D C y B C iguales al D C del cuadrado, y haciendo centro en B y en D con un ràdio igual D C tràcense dos arcos que se cruzaràn en A; desde el punto de interseccion A tírense las A B y A D y quedará resuelto el cuadrado A B C D.

Problema 2.º Dados los dos lados que forman un ángulo trazar un rectángulo.

Con los dos lados dados fórmese un ángulo recto, y haciendo centro al estremo del lado menor con un rádio igual al lado mayor trácese un arco indefinido; y haciendo centro en el estremo del lado mayor con un rádio igual al lado menor córtese el arco indefinido; desde el punto de interseccion de los arcos tírese una línea á cada uno de los dos estremos de los lados del ángulo y quedarà formado el rectàngulo. V. g.

Dados los dos lados D C y C B que forman el ángulo B C D (fig. 16) trazar el rectàngulo.

Con estos dos lados formarémos un àngulo recto B C D, y haciendo centro en el estremo B del lado menor B C con un rádio igual al lado mayor D C trazarémos un arco indefinido y haciendo centro en el estremo D del lado mayor D C con un rádio igual al lado menor C B cortarémos este arco; (lo cual lo hará en A); desde el punto de interseccion A se tirarán las A B y A D á los estremos B y D de los lados del ángulo y quedará resuelto el rectángulo A B C D:

Problema 3.º Dado un lado y un ángulo de un rombo trazar esta figura.

Fórmese un àngulo igual al dado y háganse sus lados iguales al lado dado, y haciendo centro en cada uuo de los estremos con un rádio igual al lado dado, trácense dos arcos que se crucen; desde el punto de interseccion de estos arcos tírese una línea á cada estremo desde donde se han trazado los arcos y se tendrá resuelto el problema. V. g.

Dado un lado D C y un ángulo de 45 grados formar el rombo.

Formarémos un ángulo B C D (fig. 18) de 45 grados, y harémos los lados D C y B C iguales al lado D C dado, y haciendo centro en cada uno de los estremos B y D con un rádio igual al lado D C trazarémos dos arcos que se cruzarán en A, desde el punto de interseccion A tirarémos las A B y A D á los estremos B y D y quedará trazado el rombo A B C D.

Problema 4.º Dados dos lados y el ángulo formado por ellos trazar el romboide.

Hágase lo mismo que se ha hecho para trazar el rectángulo con la sela diferencia de formar el áugulo dado en vez del recto.

Problema 5.º Dada la base, los dos lados que descansan sobre ella y los dos ángulos que forman con la misma base, de un trapecio ó trapezoide resolver la figura.

Tírese la base y fórmense en sus estremos los ángulos propuestos con sus lados correspondientes; por los estremos de estos lados tírese una recta la cual completará el cuadrilátero. V. g.

Conociendo la base D C (fig. 21), los lados A D y B

C, y sabiendo que el lado A D forma un ángulo de 63 grados con la base y que el B C lo forma de 100 grados, formarémos el cuadrilàtero de este modo: tirarémos la base D C y en el estremo D formarémos un ángulo A D C de 63 grados y que tenga por lado el A D, y en el estremo C formarémos otro àngulo B C D de 100 grados, y que tenga por lado el B C, por el estremo B y por el A trazarémos la A B y quedará resuelto el cuadrilàtero.

44. En los polígonos regulares; la recta que saliendo del centro del polígono va á terminar al vértice de uno de sus àngulos ó bien al medio de un lado se llama *rádio del polígono*; pero en el primer caso se llama *rádio oblícuo* y en el segundo *rádio recto.*

La C O (fig. 22) es rádio oblícuo del exágono A B C D E F y la O*n* es ràdio recto.

45. Si desde un vértice cualquiera A de un polígono A B C D E (fig. 24) se tiran diagonales A C, A D á sus vértices opuestos, el polígono queda dividido en tantos triángulos B A C, C A D, D A E etc. como lados tiene el polígono ménos dos.

De aqui se deduce: 1.° que, como los tres ángulos de un triángulo juntos valen dos rectos, todos los àngulos juntos de un polígono valen tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos: 2.° que como en el polígono regular, todos los ángulos son iguales, se podrá calcular el ángulo del polígono regular, multiplicando el número de lados ménos dos por 180 grados y partiendo este producto por el número de lados del polígono.

46. Si se tiran todos los rádios oblicuos de un popígono regular cualquiera V. g. el A B C D E F (fig. 22) queda dividida en tantos triángulos F O E, E O D etc. iguales como lados tiene el polígono; pues tienen todos los lados iguales por rádios de un mismo círculo y las bases tambien iguales por la igualdad de los lados del polígono regular. El rádio recto O*n* es perpendicular al lado del polígono (8..4.º).

Síguese de aqui: 1.º que todos los ángulos centrales de un polígono regular son iguales porque tienen por medida cuerdas iguales, y por consiguiente sus arcos: 2.º que podrémos buscar el àngulo central de un polígono regular cualquiera dividiendo 360 grados por el número de lados del polígono. 3.º la siguiente

## Regla general para trazar toda especie de polígonos regulares.

47. 1.º Tráccse una circunferencia y fórmese un ángulo central de tantos grados como diga el cociente de 360 dividido por el número de lados del polígono que se quiere trazar: 2.º tómese la cuerda del ángulo central y póngase tantas veces como quepa en la circunferencia; 3.º por los puntos de division de la cir-

cunferencia tírense las cuerdas y quedará trazado el polígono.

Problema 1.° Trazar un pentágono regular.

Trazarémos la circunferencia A B C D E (fig. 23) y en el centro O formarémos el ángulo C O B de $^{360}/_{5}$= 72 grados; tomarémos la cuerda B C del arco de este ángulo y la pondrémos de B á A, de A á E, de E á D etc; por los puntos A, E, D, etc. tirarémos las cuerdas B A, A E, E D, D C, y C B y quedará trazado el pentágono regular A B C D E.

Trazar el exágono regular.

Trácese la circunferencia A B F (fig. 22) y fórmese el ángulo central E O D de $^{360}/_{6}$=60 grados; tómese la cuerda E D y colóquese de E á F de F á A etc. y por los puntos E, F, A etc. tírense las cuerdas E F, F A etc. y quedará trazado el exágono A B C D E F.

Trazar un eptágono.

Hágase lo mismo que para los dos antecedentes, con la sola diferencia de formar el ángulo central de $^{360}/_{7}$=51° 25° 28 $^{4}/_{7}$ de otro segundo ó bien de 51 $^{3}/_{7}$ de grados.

Trácense finalmente polígonos de varios números de lados.

Problema 2.° Dado el número de lados de un polígono regular y la magnitud de uno de ellos trazar el polígono.

# Regla general.

1.° Fórmese un triángulo isóceles que tenga por base el lado del polígono y por ángulo opuesto á ella el cociente que resulte de dividir 360 por el número de lados del polígono (40 problema 7.°).

2.° Haciendo centro en el vértice opuesto á la base del triángulo y con un rádio igual á uno de los dos lados iguales, tracese una circunferencia: 3.° tómese la base del triángulo como á cuerda y póngase encima la circunferencia tantas veces como quepa: 4.° por los puntos de division tírense cuerdas y quedará trazado el polígono que se pida. V. g,

Dado el lado E D (fig. 23) trazar un pentagóno regular.

Dividiendo 360 por 5 dá 72, que son los grados del ángulo central: restando estos de los 180 que valen los tres ángulos de un triángulo, dá 108 que es el valor de los 2 ángulos juntos de la base; pero como estos dos àngulos son iguales cada uno valdrà la mitad de 108 ó 54 grados; formarémos pues el triàngulo E O D que tenga por base el lado E D del polígono y los ángnlos en E y en D de la base que sean de 54 grados grados cada uno: construido el triángulo, hàgase centro en O, y con un rádio igual á O E describase la circunferencia A C D; tómese el lado E D que estará como á cuerda y colóquese de E á F, de F a A de A á B etc.; por los puntos de division E, F, A. B etc.: tírense las cuerdas E F, F A, A B etc. y quedará trazado el pentágono regular.

Dado el lado de un octógono trazar este polígono.

Fórmese un triangulo isósceles que tenga por base el lado del polígono y el ángulo opuesto á ella de $^{360}/_{8}=45$ grados (40 probl. 7.º): continúese la operacion como se ha visto y quedará trazado el octógono.

Adviértase que los triángulos del exágono son equiláteros porque el ángulo central es de 60 grados, luego los dos de la base tambien lo deben ser; y teniendo sus tres ángulos iguales tambien tendrán (39.. 1.º) sus tres lados iguales: Luego para trazar un exágono se describirá una circunferencia y se le aplicará su rádio seis veces, se tirarán las cuerdas por los puntos de division y se tendrá un exágono.

Si se dá el lado tráccese la circunferencia con el rádio igual al lado.

# De las líneas proporcionales.

48. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base, los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes praporcionales. V. g.

Si por el punto $n$ del lado A B dol triángulo A B C (fig. 25) se tira la $n$ $m$ paralela á la base A C se verificará esta proporcion B A : B $n$ : : B C : B $m$.

De esta verdad se sigue, que los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas proporcionales entre si; porque dividiendo la proporcion B A : B $n$ : : B C : B $m$ dará B A — B $n$ : B $n$ : : B C — B $m$ : B $m$; pero B A — B $n$ = $n$ A y B C — B $m$ = $m$ C, sustituyendo en vez de B A — B $n$ su igual $n$ A, y en vez de B C — B $m$ su igual $m$ C se tendrá la proporcion $n$ A : B $n$ : : $m$ C : B $m$; la cual compuesta y alternada, se convierte en $n$ A + B $n$ = B A : $m$ C + B $m$ = B C : : B $n$ : B $m$ : : $n$ A : $m$ B.

Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.

49. La $n$ $m$, que es paralela á la base. es tambien proporcional con la misma base; de manera que se tiene B A : B $n$ : : A C : $n$ $m$.

Porque tirando la *n o* paralela á la B C se tendrá (48) B A : B *n* : : A C : C *o*; pero C *o* = *n m* por lados opuestos del paralelógramo *n m c o*; luego sustituyendo en vez de C *o* su igual *n m*, la proporcion se convertirá en B A : B *n* : : A C : *n m*.

La resulucion del problema del párrafo 31 se funda en que una parte de la A C (fig. 12). es á dos partes de la misma, como una parte de la A B es á dos partes de la misma, pero dos partes de la A C son duplo de una parte de la misma, luego 2 partes de la A B son tambien duplo de una parte de la misma; y como las primeras son iguales, se sigue que las segundas tambien lo deberán ser, por la igualdad de razones, las partes de la A B son iguales entre si del mismo modo que lo son las de la A C.

Problema 1.° Dados tres rectas, G, H, L. (fig. 26) hallarles una cuarta proporcional geométrica.

Fórmese un ángulo cualquiera V A Z con dos rectas indefinidas A V y A Z; en uno de los lados A V tómese una parte A B = con la 1.ª G; en el mismo lado tómese otra parte A B = con la 2.ª H; en el otro lado tómese una parte A E = con la 3.ª L; únase el estremo B de la primera con el estremo E de la tercera por medio de la B E, y por el estremo C de la segunda tírese la C F paralela à la B E, la cual irá á encontrar al otro lado, de manera que la A F será la cuarta proporcional pedida.

Porque el triángulo A C F (48) da A B : A C : : A E : A F, ó sustituyendo á estas líneas sus iguales, G : H : : L : A F.

Problema 2.° Dadas dos rectas G y H, hallarles una tercera proporcional geométrica.

Formado el ángulo V A *Z*, tómese en uno de sus lados A V una parte A B=con la 1.ª G; en el mismo lado tómese otra parte A C=con la 2.ª H; en el otro lado tómese una parte A *e*=con la 2.ª H; únase el estremo B de la primera con el *e* de la segunda por medio de la B *e*, y por el estremo C de la segunda tírese la C *f* paralela á la B *e* la cual ira á encontrar al otro lado, de manera que la A *f* será la tercera porporcional pedido.

Problema 3.° Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de mil partes. (fig. 27)

Tómese una magnitud arbitraria H y póngase diez veces sobre la A B; desde A hasta O, tómese toda la magnitud A O=10 H, y repítase nueve veces desde O hácia á la derecha, en los estremos levàntense perpendiculares, en las cuales tambien se tomarán diez partes iguales con otra magnitud arbitraria; y se tirarán rectas por los puntos de division 1, 2, 3 etc. que serán paralelas é iguales á la A B; y en la última C E tómense las mismas partes que en la A B.

Desde D á C y desde O á A, póngase 10, 20, 30, etc. en las divisiones 1.ª 2.ª 3.ª etc; únase el punto O con el punto 10 de la de arriba; el 10 de la A O con el 20 de la de arriba, y asi sucesivamenta hasta unir el punto 90 de la deabajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán tanto arriba como abajo 100, 200, 300, etc. con lo cual quedará formada la escala.

50. Ahora, para tomar un número cualquiera de partes menor que mil, se precederá del modo siguiente. En primer lugar debe tomarse esta distancia en la paralela à A B que pase por el punto que esprese el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estarà espresada por la parte de esta recta que hay interceptada entre la recta que espresa las centenas y la que va desde las decenas de abajo ó una decena mas de la de arriba. Así, si se quieren tomar 237 partes, se echa de ver que esta distancia se debe tomar en la recta 7 F, y estará representada por la parte H N interceptada entre la recta 200 que espresa las centenas y la que desde el 30 de la de abajo que espresa las decenas, va al 40 de la de arriba.

## Figuras semejantes.

51 Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; y desemejantes aquellas á que falta alguna de estas dos circunstancias. De modo que las figuras A B C D E y *abcde* (fig. 28) serán semejantes siempre que sus ángulos sean A = *a*, B = *b*, C = *c*, D = *d* etc. y ade-

mas se tenga A B: $ab$ :: BC: $bc$ :: CD : $cd$ :: etc.: etc.

52. Dos triàngulos son semejantes: 1.° cuando tienen sus tres lados proporcionales: 2.° cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados proporcionales: 3.° Cuando tienen sus tres àngulos respectivamente iguales.

De donde se infiere; 1.° que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales: 2.° que dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen uno de los ángulos agudos igual.

53 Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.

Porque siendo todos sus lados iguales, la relacion que tenga uno del polígono menor con otro del polígono mayor será la misma que la de los demas; y ademas sus ángulos son iguales.

Se llaman lados homólogos de dos figuras semejantes los que estan opuestos á ángulos iguales: así los lados A B y *ab* (fig. 24) son homólogos porque estan opuestas á los ángulos A E D y *a e d* iguales; los lados E D y *ed* son homólogos por oponerse á los àngulos E A B y *eab* iguales, y lo mismo sucede con los demas. Adviértase que siempre que se hayan de sacar proporciones de triàngulos semejantes se compararán los lados del uno con los homólogos del otro.

54. Si desde los ángulos A y *a* de dos polígonos semejantes se tiran diagonales A D y *ad* A C y *ac* etc. los triángulos A E D, A D C, A C B etc. en que queda dividido un polígono son respectivamente se-

mejantes á los *aed*, *adc* *acb* etc. del otro. Efectivamente, los triàngulos A E D y *aed* tienen el ángulo en E igual al en *e* por la semejanza de los polígonos y los lados A E y E D, *ae* y *ad* que forman este ángulos son respectivamente proporcionales por la misma razon, luego estos dos triángulos (52. 2.º) son semejantes: Los triángulos A D C y *adc* á mas de tener los lados A D, y *ad*, D C y *dc* proporcionales tienen los ángulos A D C y *adc*, formados por ellos iguales, pues que son los residuos que quedan de haber quitado los ángulos iguales E D A y *eda* de los iguales E D C y *edc*, luego estos triángulos son semejantes: y del mismo modo se manifestaria de los demas.

Síguese de aqui: 1.º que las diagonales homólogas de dos figuras semejantes son proporcionales: 2.º que la razon que hay entre las diagonales homólogas es la misma que la de los lados homólogos de las figuras y en general, la relacion que guardan dos líneas homólogos cualesquiera, es la misma que la que guardan otras dos líneas homólogas cualesquiera, y como en la Aritmética se demuestra que en una serie de razones iguales, la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, se tiene que los perímetros de dos figuros semejantes tienen la misma relacion que dos de sus líneas homólogas.

Problema 1.º Formar un polígono semejante á otro y que su perímetro sea la mitad del perìmetro del polígono propuesto. V. g.

Sea el polígono propuesto A B C D E (fig. 28). Despues de haber tirado las diagonales A D y A C tírese una línea *af* y en el estremo *a* fórmense los ángulos *ead* igual con el E A D, el *dac* igual con el D A C y el *cab* igual con el C A B; hágase el lado *ae* igual á media A E: el *ad* igual á media diagonal A D, el *ac* igual á media A C; y el *ab* igual á medio A B; únanse los puntos *e, d, c,* y *b* por medio de las rectas *ed, dc* y *cb* y quedará concluida la operacion.

Problema 2.° Construir un polígono que sea semejante á otro y que tenga su perímetro igual al del propuesto multiplicado por $^5/_2$.

Sea *abcde* (fig. 24) el polígono propuesto: hágase la misma operacion que en el problema anterior con solo la diferencia de hacer los lados A B, A C, A D, y A E de los ángulos formados en A, igual à $^5/_2$ de sus respectivos *ab, ac, ad* y *ae* del polígono propuesto.

En esta especie de operaciones lo mejor es reducir las líneas à números; esto es, medir la longitud de las líneas por medio de la escala de mil partes y espresar con números las partes que tiene cada una. Practicándolo en la operacion que se acaba de resolver se harà de este modo: mídase la *ab* y se hallarà que tiene 28 partes de la escala, multiplicando esta longitud por $^5/_2$ da 70 partes que es la longitud que ha de tener la A B; mídase la *ac* y se hallarà que tiene 29 partes, multiplicando estas 29 por $^5/_2$ da 72 $^1/_2$ partes que es la longitud que ha de tener la A C;

hágase lo mismo con las *ad* y *ae* y se tendràn las longitudes de sus respectivas A D y A E.

Problema 3.º Trazar un polígono regular de un mismo número de lados que otro polígono regular propuesto, y que tenga un perímetro igual al triple del perímetro del polígono propuesto.

Tírese el rádio oblícuo del polígono propuesto y con una abertura de compás igual al triple de este rádio trácese una circunferencia; tómese el triple de un lado del polígono propuesto y aplíquese tantas veces como quepa á la circunferencia, (que serán tantas como lados tenga el polígono propuesto) y por los puntos de division tírense cuerdas las cuales formarán el polígono pedido.

Problema 4.º Trazar un círculo cuya circunferencia sea igual á un cuarto de la circunferencia de otro círculo propuesto,

Con un rádio igual á un cuarto del rádio del círculo propuesto descríbase un círculo que serà el que se pide.

55. La relacion del diámetro á la circunferencia, segun Arquimedes, es la de 7 á 22; esto es, que un círculo pue tenga un diámetro de 7 pies la circunferencia tiene 22. No es esta la relacion mas exacta que tenemos, pero es la mas sencilla, de la cual harémos uso en los cálculos de este tratado por no exigir tanta exactitud como en otros; y porque los cálculos que piden toda la exactitud posible no se ofrecen sino en aquellas ciencias que para estudiarlas no bastan las imitadas nociones de este compendio.

56. Para buscar pues la longitud de la circunferencia de un círculo cualquiera multiplíquese la longitud del diámetro por $^{22}/_{7}$ y el producto que salga será la longitud de la circunferencia. V. g.

Si quiero saber la longitud de la circunferencia (fig. 3) mediré el diámetro B C, y hallando que su longitud es de 60 partes de la escala tendré $60 \times {}^{22}/_{7} = 188\ {}^{4}/_{7}$ partes, que es la longitud en línea recta de la circunferencia.

# SEGUNDA PARTE.

## De las superficies.

57. Hasta aqui hemos tratado solamente del perímetro de las figuras, esto es de las líneas que las limitan; ahora vamos á tratar de su estension en longitud y latitud que es lo que llamamos *superficie.*

58. Las figuras pueden ser iguales y equivalentes. Dícese que dos figuras son iguales cuando se pueden superponer de modo que se confundan, como dos duros que si se ponen uno encima de otro se confunden exactamente sus dos caras; y se dice que son equivalentes cuando tienen iguales superficies, pero no se pueden confundir aunque se superpongan, como dos varas de tela de tres palmos de ancho y una vara de tela de seis palmos de ancho.

La medida superficial, «es un cuadrado cuyo lado es la medida del pais en que se hace la medicion, como la vara, el pié, la pulgada, etc. en Castilla; y la cana, el palmo, el cuarto, en Cataluña. Cuando se dice que una sala tiene de superficie 60 varas cuadradas y 2 piés cuadrados, se debe entender que en dicha sala se pueden formar 60 cuadrados de una vara de lado y ademas dos cuadrados de un pié de lado.»

Las medidas superficiales llamadas agrarias son las que sirven para medir los terrenos. En Castilla usan de la fanega que es igual á 12 celemines cuadrados, el celemin que vale 4 cuartillos cuadrados, el cuartillo es igual á 12 estadales cuadrados, y el estadal que es igual á 16 varas cuadradas. De modo que la fanega agraria es un cuadrado de 24 estadales. = 96 varas de lado. En Barcelona se usa de la que tiene 2025 canas cuadradas ó sea un cuadrado de 45 canos de lado, y la cuartera que es la mitad de la mojada. La mojada se subdivide en 4 cuartos y el cuarto en 4 mundinas.

59. La superficie de un triángulo se halla multiplicando la base por la mitad de su altura. V. g.

Si queremos hallar la superficie del triángulo J G H (fig. 15) lo practicarémos del modo siguiente.

Medirémos la base J H y hallarémos que vale 5 $^1/_2$ partes de la escala (fig. 10); en seguida medirémos la altura G*a* y hallarémos que vale 3 $^1/_4$ de las mismas partes; multiplicarémos la base 5 $^1/_2$ por la mitad 1 $^5/_8$ de la altura 3 $^1/_4$, y el producto 8 $^{15}/_{16}$ será la superficie del triángulo propuesto. Esto es, que en el espacio triangular terminado por las rectas G J, J H y H G se pueden colocar 8 cuadrados que tengan por lado una parte de la escala y $^{15}/_{16}$ de otro cuadrado.

Si cada parte de la escala representa un pié el triángulo propuesto tendrá 8 $^{15}/_{16}$ piés cuadrados; si representa una vara el triángulo tendrá 8 $^{15}/_{16}$ varas cuadradas, etc.

60. Sabiendo hallar la superficie del triángulo es muy fácil de hallar la de cualquier otra figura rectilínea. Para esto se tiran las diagonales desde uno de los vértices de la figura á sus opuestos, y queda dividida en triàngulos; se halla la superficie de cada uno de estos triángulos y se suman, y la suma total es la superficie de la figura.

Propongàmonos medir la superficie del pentágono A B C D E (fig. 24).

Desde el vértice A tirarémos los diagonales A C y A D, y tendrémos la figura dividida en los tres triángulos A B C, A C D y A D E: tomando la A C como á base del triángulo A B C le tirarémos desde B la perpendicular B*b* la cual será la altura del triángulo: tomando la C D como á base le tirarémos desde A la perpendicular A C que será la altura del triángulo A C D: tomando la A D como á base le tirarémos la perpendicular E*e* que serà la altura del triángulo A D E. Preparada asi la figura buscarémos la superficie de cada triángulo del modo que lo hemos practicado y tendrémos: A B C=16,8 de superficie; A C D =15,4 y A D E=12,3,: sumando estas tres superficies tendrémos 44,5 que es la superficie total del pentágono propuesto.

61. El método que acabamos de esponer es aplícable á todas las figuras rectilíneas; pero para las figuras regulares y algunas otras se usa de reglas particulares que facilitan mucho mas la operacion como vamos á ver.

1.° Para hallar la superficie de un cuadrado se multiplica su lado por sí mismo.

Ejemplo. Si quiero medir la superficie de una sala cuadrada que tenga 38 pies de lado, multiplicaré el 38 por sí mismo y el producto 1444 serán los pies cuadrados que tiene la sala propuesta.

2.° La superficie de un rectángulo, y en general, la de un paralelógramo cualquiera se halla multiplicando la base por la altura. V. g.

Si hemos de medir un campo rectangular que tenga 140 varas de base y 48 de altura, multiplicarémos las 140 varas que tiene la base por las 48 que tiene la altura, y el producto 6720 son las varas superficiales que tiene el campo propuesto.

Si la pieza que se ha de medir es romboidal es preciso determinar su altura (41).

3.° La superficie de un trapecio se hallará multiplicando la semisuma de sus bases por su altura.

Si se quiere medir la superficie del trapecio A B D C (fig. 20) midiendo las basea A B y D C hallarémos que la superior vale 8 y la inferior 6 á poca diferencia; sumarémos estas dos bases y tendrémos $8+6=14$ y sacando la mitad serán 7 que es la semisuma de las bases; multiplicándola por la altura $B\,l=3$ tendrémos 21 que es la superficie del trapecio.

4.º Como el polígono regular tirando los rádios oblícuos, queda dividido en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono, y la altura de estos triángulos considerando los lados del polígono como á bases, es el rádio recto, multiplicando el lado del polígono por la mitad del rádio recto se tendrá la superficie de un triángulo, la cual multiplicada por el número de lados del polígono dará la superficie total de éste.

Dirémos pues, que para hallar la superficie de un polígono regular cualquiera, se multiplicará el lado del polìgono por el número de ellos y este producto se multiplica por la mitad del rádio recto. V. g.

Medir la superficie del exágono regular A B C D E F (fig. 22).

Tomando un lado cualquiera A B hallarémos que vale 3,7 partes de la escala (fig. 10); multiplicando esta magnitud por el número de lados del polìgono, que en nuestro caso es 6, tendrémos el producto 22,2: tomando el rádio recto $O\,n$ hallarémos que vale 2,8 cuya mitad es 1,4; multiplicando el 22,2 por esta mitad tendrémos el producto 31, 08 que es la superficie total del polìgono propuesto.

62. Como el cìrculo se puede considerar como un polìgono de un número indefinido de lados, se tendrá

su superficie multiplicando la circunferencia por la mitad de su rádio. V. g.

Propongàmonos hallar la superficie de un círculo cuyo rádio tenga 30 piés de longitud.

Primeramente buscarémos por la regla dada (56) la longitud de la circunferencia multiplicando los 30 piés que tiene el rádio por 2 para obtener la magnitud del diámetro, que será 60 piés, los cuales multiplicados por $^{22}/_{7}$ dan 194 $^{2}/_{7}$ piés que es la longitud de la circunferencia: multiplicando esta longitud por 15 piés que es la mitad del ràdio da por producto 2914 $^{2}/_{7}$ piés, que es la superficie del círculo propuesto.

## De la reduccion de las superficies.

63. Reducir una superficie es transformarle la figura, esto es, buscar una superficie equivalente á la de la figura dada. Como cuando me convenga buscar un cuadrado ú otra figura cualquiera que sea equivalente en superficie á un triángulo ú á otra figura dada cualquiera.

La resolucion de los problemas que vamos á resolver respectivos à la reduccion de las superficies se funda en la siguiente verdad.

64. Las superficies de las figuras semejantes son

como los cuadrados de sus líneas homólogas.

Si se tienen dos figuras semejantes A B C D E y *abcde* (fig. 28) que tengan A C=2*ac* se verificará que la superficie de la primera es á la superficie de la segunda como 1 es à $^1/_4$.

Para obtener los resultados mas aproximados en la resolucion de los problemas que siguen harémos uso de la escala de mil partes.

Problema 1.° Buscar un cuadrado que sea equivalente á otra figura cualquiera dada.

## Regla general.

1.° Búsquese la superficie de la figura dada: 2.° estráigase la raiz cuadrada de esta superficie, y el número que resulte será la magnitua del lado del cuadrado; el cual se formará segun la regla dada. (43 probl. 1.°) V. g.

Fórmese un cuadrado cuya superficie sea equivalente al triángulo A B C (fig. 29).

Siendo A B la base del triángulo = 100 partes y la altura C*c*=68, la superficie será (59) $^{100\times68}/_2$=3400: estrayendo la raiz cuadrada de este número tendrémos 58,3 que será la magnitud del lado del cuadrado que hemos de formar: con este lado formarémos el cuadrado A′ B′ C′ D′ (fig. 30), el cual será equivalente al triángulo propuesto.

Problema 2.° Buscar un rectángulo semejante al A B C D (fig. 16) que sea equivalente al triángulo A B C (fig. 29).

Siendo D C la base del rectángulo = 60 y la altura D A = 26, la superficie será (61..2.°) 60 × 26 = 1560: ahora tómese con el compás la diagonal D B y mírese cuantas partes de la escala contiene y se hallará que vale 68: para buscar la diagonal del rectàngulo pedido resuélvase la siguiente proporcion: 1556 (superficie del rectángulo propuesto: 3400 (superficie del rectángulo buscado):: $68^2$ (cuadrado de la diagonal del rectángulo propuesto): $x^2$ (cuadrado de la diagonal del rectángulo buscado). Resuelta esta proporcion tendrémos por cuarto término 10074 $^{22}/_{39}$ que es el cuadrado de la diagonal que buscamos, del cual estrayendo la raiz cuadrada tendrémos 100 que es la magnitud de la diagonal buscada. En el estremo D′ de una lìnea indefinida D′ C′ (fig. 31) fórmense los ángulos A′ D′ C′ y B′ D′ C iguales à las A D C y B D C (22..2.°) del rectángulo propuesto; hágase B′ D′ = 100 y desde el punto B′ bájese la perpendicular B′ C′ á la D′ C′ la cual caerá en un punto C′ tal que la D′ C′ será la base y la perpendicular B′ C′ la altura del rectángulo, el cual se concluirá segun lo dicho. (43.. 2.°).

Problema 3.° Formar un rombo semejante al A B C D (fig. 18) y equivalente al triángulo A B C (fig. 29).

Multiplicando la base D C=56 por la altura $Al$ =42 el producto 2352 será la superficie del rombo propuesto. Para buscar el lado del rombo pedido se resolverá esta proporcion 2352: 3400:: $56^2$: $x^2$:=4533 $^{784}/_{2352}$, y de este valor estráigase la raiz cuadrada y se tendrá 67 que es la magnitud del lado del rombo propuestó. Conociendo el lado y un ángulo A D C se podrà trazar el rombo A′ B′ C′ D′ (fig. 32) conforme se ha visto (43..3.°).

Problema 4.° Construir un romboide semejante al A B C D (fig. 19) y equivalente al mismo triángulo.

Mídase la superficie del romboide propuesto y se hallará ser 2736; despues mídase la diagonal B D y se hallará que vale 56, y resuélvase esta proporcion 2736: 3400:: $56^2$: $x^2$ =3897 $^{18}/_{171}$ y estráigase de este valor la raiz cuadrada y se tendrá 62,4 que serà la diagonal del romboide que se busca. Para construir el romboide fórmense los ángulos A′ D′ C′ y B′ D′ C′ (fig. 33) iguales á los A D C y B D C del romboide propuesto, y hàgase B′ D′=62.4; por el estremo B′ de la diagonal tírese una paralela á la D′ C′ prolongada hasta encontrar la D′ A′, y por el mismo punto B′ tírese la B′ C′ paralela à la A′ D′ hasta encontrar la D′ C′ y quedará formado el romboide A′ B′ C′ D′ pedido.

Problema 5.° Trazar un trapecio semejante al A B C D (fig. 20) y que sea equivalente al mismo triángulo.

Siendo D C=60, A B=80 y $Bl$=30 la superficie será (61. 3.°) $^{60+80}/_{2}\times 30=70\times 30=2100$; mídase la diagonal D B y se hallará que vale 83; búsquese la diagonal del trapecio que se busca del modo que la hemos buscado en los problemas 2.° y 4.° y se hallarà ser de 105,6. Para construir la figura fórmense los ángulos A′ D′ C′ y B′ D′ C′ (fig. 34) iguales á los A D C y B D C del trapecio propuesto; y hàgase la B′ D′=105,6: la magnitud de los lados A′ D′ y D′ C′ se determinará por medio de estas dos proporciones: B D: B′ D′:: A D: A′ D′ y B D: B′ D′:: D C: D′ C′ (54. 1.° y 2.°), y como B D=83, B′ D′=105,6, A D=30 la primera proporcion será 83: 105,6:: 30: A′ D′= $^{105'6}\times{}^{30}/_{83}=83\ ^{14}/_{83}$ que es la magnitud que ha de tener el lado A′ D′, : la segunda proporcion se convertirá en 83:105,6:: 60: D′ C= $^{105'6}\times{}^{30}/_{83}=76\ ^{28}/_{83}$ que es la magnitud del lado D′ C′: determinada la longitud de los lados de los ángulos que se forman en D′, únanse sus estremos C′, y A′ por medio de las C′ B′ y B′ A′ y quedará construida la figura pedida.

Problema 6.° Trazar un cuadrilátero que sea equivalente al triángulo (fig. 29) y semejante al A B C D (fig. 21).

Fórmense los ángulos A′ D′ C′ y B′ D′ C, (fig. 35) iguales á los A D C y B D C de la figura propuesta, determínese la diagonal B′ D′ del modo que hemos visto, y teniendo la diagonal conocida búsquese la magnitud de los lados A′ D′ y D′ C′; únanse los estremos de estos lados por medio de las C′ B′ y B′ A′ y quedará trazado el cuadrilátero pedido.

Problema 7.° Construir un pentágono semejante al A B C D E (fig. 24) y equivalente al triángulo (fig. 29).

En el punto A′ (fig. 36) fórmense los ángulos B′ A′ E′, C′ A′ E′ y D′ A′ E′ iguales à los B A E, C A E y D A E del pentágono propuesto; determínese una cualquiera de las dos diagonales V. g. la C′ A′ del modo que se ha hecho en las otras figuras; conocida la magnitud de la C′ A′ búsquese la de los otros lados de los ángulos qne se forman en A′, del modo que se ha hecho en el problema 5.°; únanse los estremos B′, C′, D′, y E′ de estos lados por medio de las B′ C′, C′ D′ y D′ E′ y quedará resuelto el problema.

Todo lo que acabamos de practicar lo hallarémos en la siguiente

## Regla general para construir una figura que llamarémos 1.ª, que sea equivalente á otra figura cualquiera que llamarémos 2.ª y semejante á otra que llamarémos 3.ª

1.° Desde uno de los vértices de la *tercera* tírense todas las diagonales: 2.° Mídase la superficie de las figuras *segunda* y *tercera*; 3.° resuélvase esta proporcion, la superficie de la *tercera*: superficie de la *segunda*:: el cuadrado de la diagonal de la *tercera*: x, y del valor que salga para x estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la longitud de una diagonal de la *primera*: 4.° conocida una diagonal de la *primera* búsquese la magnitud de todas las líneas de la *primera* homólogas á las que concurren al vértice del ángulo de la *tercera* desde donde se han tirado las diagonales: 5.° determinada la magnitud de las diagonales de la *primera* y los dos lados del ángulo desde cuyo vértice se han de tirar, trácese la figura (54 probl. 3.° y 2.°)

Por la mucha aplicacion que puede tener á las artes resolverémos algunos problemas mas.

8.° Formar un triángulo semejante al A B C (fig. 25) y equivalente al cuadrado A′ B′ D′ E′ (fig. 30).

Siguiendo la regla general, aquí no entra el primer artículo, practicarémos el 2.° midiendo la superficie del cuadrado y la del triángulo; resolverémos esta proporcion, superficie del triángulo: superficie del cuadrado:: el cuadrado de un lado del triángulo: x; del valor de x estraerémos la raiz cuadrada y tendrémos un lado del triángulo que se ha de construir; conociendo la relacion de un lado A B con su homólogo del triángulo que se ha de construir buscarémos la magnitud del homólogo al A C por medio de esta proporcion A B: su homólogo:: A C: x cuyo valor será la longitud del homólogo al A C; determinados los dos lados A′ C′ y A′ B′ (fig. 29) y el ángulo C′ A′

B′ que ha de ser igual al A B C (fig. 25) trazarémos el triangulo A′ C′ B′ (40. 2 °).

9.° En fin para practicarse, los principiantes podrán transformar la superficie de cada una de las figuras 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 y 36 en las demas figuras, como hemos hecho con el triángulo que lo hemos transformado en cuadro, rectángulo, rombo, etc.

65. Por lo muy interesantes que pueden ser à las artes esta especie de problemas, resolverémos los siguientes, á fin de que los principiantes se pongan en estado de resolver los muchos que se pueden ofrecer.

1.° Construir un triángulo equilátero que tenga 100 pies cuadrados de superficie.

Constrúyase un triángulo equilátero cualquiera y mídase su superficie; multiplíquese el cuadrado del lado del triángulo trazado por la superficie 100 del triángulo buscado y el producto divídase por la superficie del triángulo trazado; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la longitud del lado del triángulo qne se pide, el cual se construirá segun lo dicho (40. 4.°)

2.° Constrúyase un triángulo que tenga 340 pies de superficie y que sea semejante á otro dado, G J H (fig. 15).

Multiplíquense los 340 pies por el cuadrado del lado J H y divídase el producto por la superficie del triángulo dado; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá el lado homólogo de J H, del triángulo que se busca: para hallar el homólogo de J G multiplíquese éste por el que hemos hallado y el producto divídase por J H y se tendrá el homólogo de J G. Conociendo los dos lados que forman un mismo ángulo y este ángulo se trazará el triángulo (40.. 2.º).

3.º Construir un cuadrado de 84 pulgadas de superficie.

Estráigase la raiz cuadrada de 84 y lo que resulte será la longitud del lado del cuadrado, el cual se construirá segun lo dicho (43..1.º).

4.º Construir un rectángulo de 348 líneas de superficie y que los lados que forman un mismo ángulo tengan la razon de 2: 3:

Fórmese un rectángulo cuyos dos lados contiguos tengan la razon de 2: 3; multiplíquese el cuadrado de la base de este rectángulo por 348 líneas y divídase el producto por la superficie del rectángulo trazado; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la base del rectángulo pedido; multiplíquese esta base por la altura del rectángulo trazado y divídase el producto por la base del mismo, y el cociente dará la altura del rectángulo que se busca, el cual se trazará conforme hemos visto (43..2.º).

5.º Construir un rombo de 130 líneas de superficie y que sea semejante al A B C D (fig. 18).

Multipliquense las 130 líneas por el cuadrado de un lado D C del rombo dado y el producto divídase por la superficie del mismo rombo; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la longitud del lado del rombo pedido, el cual se construirá segun se ha visto (43..3.º).

6.º Construir un romboide de 94 líneas cuadradas y que sea semejante al A B C D (fig. 19).

Multiplíquense las 94 líneas por el cuadrado de la base D C del romboide dado y el producto divídase por la superficie del mismo romboide; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la base del romboide propuesto; multiplíquese esta base por el lado D A del romboide dado y el producto divídase por la base D C del mismo y se tendrá el lado homólogo á D A del romboide que se busca, el cual se trazará como hemos visto (13..4.º).

7.º Construir un cuadrilátero de 220 líneas cuadradas y que sea semejante al A B C D (fig. 21).

Multiplíquense las 220 líneas por el cuadrado de la base D C del cuadrilátero propuesto, y el producto divídase por la superficie del mismo cuadrilátero, del cociente que resulte estràigase la raiz cuadrada y se tendrá la base del cuadrilátero que se busca; multiplíquese esta base por la diagonal D B del cuadrilátero propuesto y el producto divídase por la base D C del mismo y se tendrá la diagonal homóloga á D B del cuadrilátero buscado; multiplíquese la base de éste por el lado A D y el producto divídase por la base D C, y se tendrá el lado homólogo á A D del cuadrilátero pedido. Para trazar la figura fórmense en un punto dos ángulos iguales á los A D C y B D C y háganse sus lados respectivamente iguales á las longitudes que hemos hallado, únanse los estremos de estos lados por medio de dos rectas y quedará trazado el cuadrilátero pedido.

8.° Construir un polígono regular de un número dado de lados cuya superficie sea 437 líneas cuadradas.

Trácese un polìgono regular del mismo número de lados que el pedido; multiplíquense las 437 lìneas por el cuadrado del lado del polígono trazado y el producto divídase por la superficie del mismo; del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la longitud del lado del polígono pedido, el cual se trazará conforme se ha visto (47..2.°).

9.° Construir un círculo que tenga 200 líneas cuadradas de superficie.

Trácese un círculo cualquiera; multiplíquense las 200 líneas por el cuadrado de su rádio, y divídase el producto por la superficie del mismo (62); del cociente que resulte estráigase la raiz cuadrada y se tendrá la longitud del rádio del círculo que se pide.

# TERCERA PARTE.

## DE LOS CUERPOS SÓLIDOS.

### De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.

66. Hasta aquí solo hemos considerado las rectas tiradas sobre un mismo plano: ahora vamos á manifestar las posiciones que pueden tener respecto de los planos donde no se hallan, y la posicion de los diferentes planos entre sí.»

«Se dice que una recta es perpendicular á un plano ó que un plano es perpendicular á una recta, cuando dicha recta es perpendicular á todas las líneas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular encuentra al plano, cuyo punto se llama *pie* de la perpendicular. Este pie de la perpendicular se llama tambien la *proyeccion* del puuto del espacio sobre dicho plano.»

«Una recta es paralela á un plano, ó un plano es paralelo á una recta, cuando no se pueden encontrar aunque se prolonguen todo lo que se desee, y dos planos son paralelos, cuando no se pueden encontrar á cualquier distancia que se prolonguen.»

«Esto entendido, lo primero que se debe saber es, que, asi como por un punto pueden pasar infinitas líneas, del mismo modo por una recta pueden pasar infinitos planos.

«Sìguese de aqui: 1.° que por dos puntos pueden pasar infinitos planos: 2.° que tres puntos no situados en línea recta determinan la posicion de un plano: 3.° que dos rectas que se corten están en un mismo plano: 4.° que dos paralelas determinan la posicion de un plano.»

«Si desde un punto fuera de un plano se le baja una perpendicular y diferentes oblìcuos se verificará: 1.° que la perpendicular será la mas corta: 2.° que las oblìcuas que disten igualmente de la perpendicular serán iguales: 3.° que la oblìcua que mas se separe será la mas larga.»

«Dedúcese de esto: 1.° que desde un punto del espacio no se puede bajar mas de una perpendicular á un plano: 2.º que la distancia de un punto á un plano se mide por la perpendicular bajada á este plano desde dicho punto: 3.º que desde un mismo punto se pueden tirar muchísimas oblícuas iguales al plano, cuyos estremos estarán en una circunferencia trazada desde el pié de la perpendicular como á centro.»

«El ángulo que una oblícua forma con el plano á que lo es, se determina bajando una perpendicular, al al plano desde un punto de la oblícua y uniendo el pié de esta perpendicular con el punto en que la oblícua encuentra al plano. Esta recta de union forma con dicha oblícua un ángulo que es el pedido.»

67. Acerca la combinacion de las rectas con el plano debe advertirse tambien: 1.º que «en un punto de un plano no se puede levantar mas de una perpendicular á este plano: 2.º que por un punto del espacio pueden pasar muchas rectas paralelas á un plano: 3.º qne toda recta paralela á otra trazada sobre un plano es paralela á este plano: 4.º por un punto del espacio solo puede pasar un plano perpendicular á una recta dada: 5.º las perpendiculares á un mismo plano son paralelas: 6.º todo plano perpendicular á una de varias rectas paralelas lo es tambien á las demas.»

# Combinacion de los planos entre sí.

68. Cuando dos planos se cortan «la comun intersección es una linea recta.»

El ángulo que forman entre sí dos planos que se corten» se llama *ángulo diedro*;» y tiene por medida el ángulo rectilíneo formado por dos perpendiculares á la comun interseccion, levantadas en un mismo punto de esta línea y una en cada plano.»

Dos planos son perpendiculares entre sí, «siempre que es recto su ángulo diedro;» y son oblícuos entre sí, «cuando este ángulo diedro no es recto.»

Plano vertical «es el que puede contener una recta á plomo.»

Plano horizontal «es aquel sobre el cual se pueden trazar dos horizontales que se corten, y plano inclinado es el que no es vertical ni horizontal.»

69. Con respecto à los planos verticales y horizontales debe saberse: 1.° que una recta trazada sobre un plano vertical puede ser horizontal, inclinada ó vertical: 2.° que una recta trazada sobre un plano horizontal es siempre horizontal: 3.° que la interseccion de dos planos verticales es una recta vertical: 4.° qde todos los planos horizontales son paralelos

entre sí: 5.º qde dos planos que se corten, vertical el uno y horizontal el otro, son entre sí perpendiculares.

70. Tocante á los planos que son mútuamente perpendiculares debe saberse 1.º,, que si una recta es perpendicular à un plano, todos los planos que pasen por dicha recta serán tambien perpendiculares á este plano: 2.º que toda recta perpendicular á uno de dos planos perpendiculares es paralela al otro plano: 3.º que la interseccion de dos planos perpendiculares á un tercero es perpendicular tambien á este último plano.»

71 Respecto á los planos paralelos conviene saber lo siguiente: 1.º Si un plano pasa por una recta paralela á otro plano, la interseccion de este plano, si le corta, será una recta paralela a la primera: 2.º Toda recta paralela á la interseccion de dos planos es paralelo á ambos planos y vice—versa: 3.º Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelas: 4.º Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero plano son rectas paralelas: 5.º Una recta perpendicular á uno de varios planos paralelos lo es tambien à los demas: 6.º Dos planos paralelos á un tercero son paralelos entre sí: 7.º Las partes de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales en longitud: 8.º Dos planos paralelos estan equidistantes en todos sus puntos.»

# Angulos poliedros.

72. Angulo poliedro es «la porcion indefinida del espacio comprendido entre tres ó mas planos que se corten en un mismo punto llamado *vertice* del ángulo poliedro.» Estos planos «se llaman *caras* del ángulo y la interseccion de dos caras contíguas toma el nombre de *arista.*»

Segun el número de caras que tiene el ángulo poliedro toma diferentes nombres; «si consta de 3 caras se llama àngulo *triedro*, si consta de 4 ángulo *tetraedro*, si de 5 ángulo *penteadro* y asi siguiendo.»

El ángulo poliedro es regular «cuando son iguales entre sí, 1.° todos sus ángulos diedros; 2.° todos los ángulos planos qus constituyen sus caras.»

73. Con respecto á los ángulos poliedros conviene saber: «1.° Que en todo ángulo triedro la suma de los ángulos de dos caras es mayor que el tercer ángulo; 2.° Que dos ángulos triedros son iguales cuando tienen iguales respectivamente sus caras y dispuestas del mismo modo; 3.° Que la suma de todas las caras de un ángulo poliedro cuyos àngulos diedros son todos salientes no puede llegar á valer 4 rectos ó 360 grados.

## De los cuerpos poliedros.

74. Cuerpo poliedro es el espacio cerrado por 4 ó mas planos que se cortan de dos en dos. Estos planos se llaman caras del poliedro y su conjunto constituye la superficie del mismo cuerpo. Los lados de las caras se llaman *aristas* y los puntos de interseccion de estas aristas *vértices*.

Los planos A F H G, F D Y H, D C J Y, C B L J, B A G L, (fig. 37) son las caras laterales del poliedro, y los A B C D F y G H Y J L son las caras superior é inferior que se llaman base superior y base inferior. Las A G, F H, B L etc. son las aristas y los puntos A, F, L etc. los vértices.

Ragularmente se consideran tres especies de poliedros, que son: los *prismas*, las *pirámides* y los *poliedros regulares*.

## De los prismas y de sus propiedades.

75. Prisma es un cuerpo poliedro que tiene sus bases opuestas iguales y paralelas y las demas caras

son paralelógramos: tal es la figura (37). Si estas bases son triángulos como las de la figura (38) el prisma se llama *triangular*; si son cuadriláteros como las de la figura (39) *cuadrangular*; si son pentágonos como las de la figura 37 *pentagonal.*

Los prismas cuadrangulares se subdividen en *trapezoidales, trapeciales paralelepípedos*, segun sus bases sean trapezoides, trapecios ó paralelógramos.

Los paralelepípedos toman tambien el nombre de sus bases; asi se llama *rectangular, rombal* ó *romboidal*, segun sean sus bases rectángulos, rombos ó romboides. La figura 39 es un paralelepípedo romboidal.

Si el paralelepípedo rombal tiene todas sus caras iguales entre si, esto es que todas sus seis caras sean rombos iguales, como la figura 41, se llama *rombaedro*; y cuando sus seis caras son cuadrados iguales, como la figura 40 se llama *cubo.*

76, Los prismas en general se dividen en *rectos* y *oblícuos*: se llama *recto* el prisma que tiene sus aristas laterales perpendiculares á las bases como el de la figura 37, y oblícuo el que no las tiene perpendiculares como la figura 38.

El prisma que tiene por bases dos polígonos regulares y es *recto* es *regular*. La perpendicular tirada á una base ó á su prolongacion, desde un punto de la otra se llama *altura* del prisma.

Tocante á los prismas en general conviene saber: «1.° que todas las aristas laterales de un prisma son iguales: 2.° Las secciones hechas en un prisma por planos paralelos que corten todas las aristas laterales son polígonos iguales entre sí: 3.° Toda seccion hecha en un prisma por un plano paralelo á las aristas laterales es un paralelógramo: 4.° Todo prisma pentagonal se puede descomponer en tantos prismas triangulares de su misma altura como triángulos se pueden formar en una de las bases, por diagonales á sus vértices desde uno de ellos.»

Respecto á los prísmas rectos debe advertirse «que las aristas laterales son iguales à la altura del prisma y que todas las caras laterales son rectángulos, é iguales entre sí cuando el prisma es regular.»

Respecto à los paralelepípedos conviene saber tambien: 1 ° que en todo paralelepípedo las caras opuestas son iguales y paralelas: 2.° Sus doce aristas son iguales y paralelas de cuatro en cuatro: 3.° El plano diagonal le divide en dos prismas triangulares (que son iguales cuando el paralelepípedo es recto) y la seccion es un paralelógramo.

## De las pirámides.

77. *Pirámide es un cuerpo poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y sus caras laterales son triángulos que tienen un vértice comun llamado cúspide de la pirámide.* Tal es la figura 42.

Si la base de la piràmide es un triángulo la pirámide se llama *triangular,* si es un cuadrilàtero *cuadrangular*, si es un pentágono *pentagonal,* etc.

Las pirámides que tienen por base un polígono regular y la recta que une su cúspide con el centro de la base es perpendicular à esta base son *regulares,* y las que carecen de estas circunstancias *irregulares.*

La perpendicular bajada á la base ó á su prolongacion desde el cúspide de la pirámide se llama altura. Tales son S*o* (fig. 42 y 43).

La porcion de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte todas las aristas de dicho cuerpo se llama *trozo de pirámide.* Pero si el plano secante es paralelo á la base entonces se llama *tronco de la pirámide,* y la porcion de pirámide que queda despues de haber quitado el tronco se llama *pirámide deficiente.*

El tronco de pirámide tiene dos *bases,* la base propiamente dicha y su cara paralela.

Las piràmides que tienen semejantes sus caras correspondientes é iguales sus ángulos poliedros respectivos son semejantes.

78. Acerca de las pirámides conviene saber: «1.º Toda pirámide puede descomponerse en tantas pirámides triangulares de igual altura que ella, como triángulos se pueden formar en su base por medio de diagonales; 2.º Todo plano que corta à una pirámide paralelamente á su base, dá una seccion semejante á esta base y la *pirámide deficiente* es semejante á la

total; 3.° Las caras laterales de una pirámide regular son triangulos isóceles é iguales entre sí, y son trapecios isóceles é iguales tambien las caras de una pirámide truncada, resultante de una seccion de una pirámide regular por un plano paralelo á su base; 4.° Todo prisma triangular puede descomponerse en tres piràmides de igual altura y base equivalente.»

## Poliedros regulares.

79. *Poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son tambien iguales entre sí.*

Solo puede haber cinco poliedros regulares, á saber: el *tetraedro*, el *exaedro* ó *cubo*, el *octaedro*, el *dodecaedro* y el *icosaedro*.

El *tetraedro regular* es una pirámide triangular equilátera, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros iguales al de la base: el *exaedro regular* es el *cubo* que hemos dado à conocer (75): el *octaedro regular* es un poliedro cuyas caras son ocho triángulos equiláteros iguales: el *dodecaedro regular* que tiene doce caras, pentágonos regulares iguales entre sí: y el *icosaedro regular* es nn poliedro cuyas caras son veinte triàngulos equilàteros iguales.

# Superficie de los poliedros.

80. La superficie de un poliedro en general se halla buscaudo la de cada cara y reuniéndolas en una sola.

La superficie total de un prisma regular se obtiene multiplicando la suma de una arista lateral con el ràdio recto de la base por el perímetro de esta base.

La superficie lateral de un prisma recto se tiene multiplicando una arista lateral por el perímetro de la base del prisma. V. g.

Si quiero hallar la superfieie del prisma recto (fig. 39) lo haré de este modo. $AE \times (EF + FG + GH + HE) = 97 \times (30 + 50 + 30 + 50) = 97 \times 160 = 15520$.

Para la superficie lateral de un prisma oblícuo se multiplica una arista lateral por el perímetro de una seccion ocasionada al prisma por un plano perpendicular à dicha arista.

La altura de una cara cualquiera de una piràmide se llama *apotema*.

La superficie lateral de una piràmide regular es igual al producto que resulta de multiplicar el perímetro de la base por la mitad de la *apotema*.

La superficie de una pirámide regular truncada se obtiene multiplicando la altura de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Para hallar la superficie de un poliedro regular cualquiera se buscarà la de una cara y se multiplicarà por el número de caras del poliedro.

## Volúmen de los poliedros.

81. Volúmen de un cuerpo es la estension limitada por su superficie.

La *unidad de medida* para los volúmenes de los cuerpos es el *cubo*, cuya arista es igual à la unidad de longitud, como la la vara, el pie, la pulgada, etc. Asi cuando se diga que el volúmen de un cuerpo es de 8 varas 6 pies *cùbicos,* querrà decir que con la estension de dicho cuerpo, se podràn formar 8 cubos de una vara de arista, mas seis *cubos* de un pié de arista ó lado.

Se dice que dos ó mas poliedros son *semejantes* cuando se componen de igual número de caras semejantes, colocadas del mismo modo y cuyos àngulos poliedros homólogos son respectivamente iguales.

*Los volúmenes de dos poliedros semejantes son como los cubos de sus líneas homólogas.* Si una arista del mayor vale, por egemplo, 3 pies y la del menor 2 pies, el volúmen del primer cuerpo con respecto al segundo es como $3 \times 3 \times 3 = 27 : 2 \times 2 \times 2 = 8$ es decir que si el volúmen del primero es de 27 pies, varas, etc. el del segundo serà de 8 pies, varas, etc.

*El volúmen de un prisma se halla multiplicando la superficie de su base por la altura del prisma.*

Asi un algibe de forma paralelepípeda que tiene de largo 24 pies, de ancho 16 pies y de profundidad 5 pies, podrà contener $24 \times 16 \times 5 = 1920$ pies cúbicos de agua; esto es que en dicho algibe cabrá 1920 veces el agua que cabria en un cubo de un pié de arista.

*El volúmen de un cubo es igual al produsto que resulta de multiplicar por si misma dos veces una de sus aristas.*

En un estanque de forma cúbica, que tuviese 22 pies 3 pulgadas de lado cabrian, segun esta regla, 22 ps. 3 pls. $\times$ 22 ps. 3 pls. $\times$ 22 ps. 3 pls. = 267 pls. $\times$ 267 pls. $\times$ 267 pls. = 19032163 pulgadas cúbicas de agua.

Para reducir estas pulgadas à pies cúbicos se dividiràn por $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pulgadas cúbicas que tiene un pié cúbico y se tendrà 11015 pies 243 pulgadas cúbicas. Si querémos reducir estos pies cúbicos à varas cúbicas las dividirémos por $3 \times 3 \times 3 = 27$ pies cúbicos que tiene una vara cúbica y se tendrà 407 varas 2 pies 243 pulgadas cúbicas.

*Para hallar el volúmen de una pirámide se multi-*

*plicará la superficie de su base por el tercio de su altura.*

Asi pues el volúmen de una piràmide cuya base tenga 30 pies cuadrados de superficie y cuya altura sea de 24 pies serà de $30 \times {}^{24}/_{3} = 30 \times 8 = 240$ pies cúbicos.

Cuando sea posible, esto es, cuando los cuerpos cuyo volúmen se quiere medir sean pequeños, el modo mas fàcil, exacto y general à toda especie de cuerpos es el siguiente. Póngase el cuerpo cuyo volúmen se quiere medir dentro de una *caja* ó *algibe* de forma paralelepípeda y de volúmen conocido; llénese de agua dicha caja ó algibe y sàquese luego el cuerpo cuidando de no derramar nada de líquido; calcúlese el volúmen del paralelepìpedo que forma el vacío que ha quedado en la caja ó algibe y este volúmen es el del cuerpo medido.

## De los cuerpos redondos.

**82.** *Llámase cuerpo redondo todo cuerpo que carece de ángulos poliedros.*

La Geometría elemental solo considera tres cuerpos redondos: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

**83.** *Cilindro es un cuerpo cuyas dos bases opuestas* *son dos círculos iguales y paralelos, y cuya superficie lateral es convexa.* Tal es A D F C (fig. 44). La línea *eg* que une los centros de las bases se llama *eje*: cuando el *eje* es perpendicular á las bases el cilindro es *recto*, como la figura 44, y es oblícuo cuando el eje no es perpendicular; tal como el A D F C (fig. 45).

La altura de un cilindro es la perpendicular bajada desde un punto de la base superior á la inferior ó a su prolongacion, tal como la C*l*.

Toda seccion hecha en un cilindro por un plano paralelo á la base es un círculo igual á esta base.

84. *Cono es un cuerpo que tiene por base un círculo y está terminado por una superficie curva que acaba en un punto llamado cúspide ó vértice del cono*; tal es S B D C E (fig. 46 y 47).

El punto S que termina el cono se llama *vértice del cono* y la recta S A que desde el vértice va al centro de la base se llama *eje del cono.* Cuando este eje es perpendicular á la base el cono es *recto* (fig. 46), y cuando no es perpendicular *oblícuo* (fig. 47): en éste se llama *altura* la perpendicular bajada desde el cúspide á la base ó á su prolongacion; tal es la S O (fig. 47); en el cono recto la altura es el mismo eje.

Si se corta un cono por un plano horizontal la porcion del cono comprendida entre la base y el plano cortante se llama *trozo de cono* ó *tronco de cono*: se llama *trozo* cuando la seccion hecha por el plano cortante no es paralela á la base, y se llama *tronco* cuando es paralelo á dicha base. En este caso la seccion se llama base, la cual es un círculo.

85. *Se llama esfera un cuerpo terminado por una superficie curva, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno que se llama centro.*

La recta que desde el centro va á parar á la superficie de la esfera se llama *rádio*, y la que pasando por el centro termina por ambos estremos à la superficie *diámetro*.

Si la esfera se considera que gira sobre un diámetro, éste se llama *eje* y los estremos de este eje *polos*.

Cuando se corta una esfera por un plano la seccion que resulta es un *círculo* que se llama *máximo* si el plano secante pasa por el centro de la esfera, y *menor* si no se verifica esto.

Todo círculo màximo que pasa por los dos polos de la esfera se llama *meridiano*: y todo círculo perpendicular al eje se llama *paralelo*.

Con respecto à la esfera es bueno saber: 1.° que todos sus rádios son iguales: 2.° que tambien lo son todos sus diámetros: 3.° que todos los círculos máximos son iguales y se cortan mútuamente por mitad: 4.° que los círculos menores van disminuyendo á medida que su centro se aleja del de la esfera: 5,° qne los centros de los círculos paralelos están en el eje: 6.° que por dos puntos de la superficie de la esfera, que no sean estremos de un diàmetro, solo puede pasar una circunferencia de círculo máximo: 7.° todo círculo máximo divide la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios*.

# Poliedros inscritos y circunscritos á los cuerpos redondos.

86. *Por plano tangente de un cilindro y de un cono se entiende todo plano que solo tenga una recta comun cōn estos cuerpos; y plano tangente de una esfera es el que solo tiene un punto con su superficie.*

Se dice que un poliedro està *inscrito* en un cuerpo de revolucion, ó que este cuerpo está *circunscrito* al poliedro cuando todos los vértices del poliedro estàn en la superficie del cuerpo de revolucion, y cuando las caras del poliedro son todas tangentes al cuerpo de revolucion se dice que el poliedro está *circunscrito* al cuerpo de revolucion, ó este cuerpo *inscrito* al poliedro.

Al cilindro regularmente se le inscriben y circunscriben los prismas; al cono las pirámides, y à la esfera los poliedros en general. Los cinco poliedros regulares son todos inscriptibles y circunscriptibles á la esfera.

# Superficie de los cuerpos de revolucion.

87. *La superficie convexa de un cilindro recto se halla multiplicando la circunferencia rectificada de una de sus bases por la altura del cilindro.* V. g.

Si querémos saber la superficie convexa del cilindro fig. 44 lo practicarémos de este modo: A C $\times$ $^{22}/_7$ $\times$ eg. $= 64 \times {}^{22}/_7 \times 120 = {}^{64 \times 22 \times 120}/_7 = {}^{168960}/_7 =$ 24137 $^1/_7$. Adviértase que el $^{22}/_7$ es lo que vale la circunferencia respecto del diámetro.

La superficie total de un cilindro recto se obtiene multiplicando la suma de la altura del cilindro con el ràdio del cìrculo de su base por la circunferencia de esta base. V. g.

Si querémos medir la superficie total del cilindro (fig. 44) lo harémos como sigue: $(eg + Ae)\ {}^{22}/_7$ A C $=$ $(120 + 32)\ {}^{22}/_7 \times 64 = 152 \times {}^{1408}/_7 = {}^{214016}/_7 =$ 30573 $^5/_7$.

88. La superficie convexa de un cono recto es igual al producto de la circunferencia de su base por la mitad del lado del cono.

La superficie convexa del cono (fig. 46) será $^{22}/_7$ B C $\times$ $^1/_2$ S C $= {}^{22}/_7 \times 53 \times {}^{88}/_2 = {}^{1166}/_7 \times 44 = {}^{51304}/_7 =$ 7329 $^1/_7$.

Para hallar la superficie total del cono multiplíquese la circunferencia de su base por la semisuma del rádio de esta base y lado del cono. V. g.

La superficie total del cono anterior será pues: $^{22}/_{7}$ $CB \times AC + SC/2 = {}^{1166}/_{7} \times 26\frac{1}{2} + {}^{88}/_{2} = {}^{1166}/_{7} \times {}^{229}/_{4} = {}^{267014}/_{28} = 9536\ {}^{3}/_{14}$.

La superficie convexa del tronco de cono recto se hallará multiplicando el lado del cono por la semisuma de las circunferencias de sus bases.

89. La superficie de una esfera se hallará multiplicando $^{22}/_{7}$ por el cuadrado de su diámetro.

Por esta regla una esfera que tenga 25 pulgadas de diámetro tendrá de superficie $^{22}/_{7} \times 25^2 = {}^{22}/_{7} \times 625 = {}^{13750}/_{7} = 1964\ {}^{2}/_{7}$ pulgadas cuadradas ó bien 13 pies 92 $^{2}/_{7}$ pulgadas.

La superficie de la esfera vale cuatro superficies de círculo máximo.

90. Llámase *casquete esférico* la menor de las dos porciones esféricas en que queda dividida la esfera por un plano que la corta sin pasar por su centro; él círculo menor originado por el plano que ha cortado la esfera para determinar dicho casquete se llama *base* del mismo; y la porcion de rádio de la esfera, perpendicular á la base del casquete y comprendida entre esta base y la superficie de dicho casquete se llama *altura* del mismo.

La superficie curva de un *casquete esférico* se calcula multiplicando la circunferencia rectificada de un círculo màximo de la esfera por la altura del casquete.

Un casquete esférico cuya altura sea de 5 pies y corresponda à una esfera de 15 pies de diàmetro tendrà de superficie segun la regla $^{22}/_{7} \times 15 \times 5 = {}^{330}/_{7} \times 5 = {}^{1650}/_{7} = 235\ {}^{5}/_{7}$ pies cuadrados.

91. *Zona* esférica es la porcion de superficie esférica comprendida entre dos círculos paralelos. Estos circulos son las bases de la zona y su altura es la recta que une los centros de dichos círculos.

La superficie esférica de una zona se obtiene multiplicando la circunferencia rectificada de un círculo màximo de la esfera por la altura de la zona.

## Volúmen de los tres cuerpos redondos.

92. ***El volúmen de un cilindro cualquiera es igual al producto de la superficie de su base por su altura.***

El volúmen del cilindro (fig. 44) serà $^{22}/_{7}$ A C $\times$ $^{1}/_{4}$ A C $\times eg = {}^{22}/_{7} \times 64 \times 16 \times 120 = {}^{2703360}/_{7} = 386194\ {}^{2}/_{7}$ partes de la escala (fig. 27) cúbicas.

El volúmen del cilindro (fig. 45) serà: $^{22}/_{7}$ A C $\times$ $^{1}/_{4}$ A C $\times Cl = {}^{22}/_{7} \times 40 \times 10 \times 100 = {}^{880000}/_{7} = 125714\ {}^{2}/_{7}$ partes cúbicas.

93. ***El volúmen de un cono cualquiera es igual al producto de la superficie de su base por el tercio de su altura.***

El cono recto (fig. 46) tendrà de volúmen $^{22}/_7$ B C $\times$ $^1/_4$ B C $\times$ $^1/_3$ S A $=$ $^{22}/_7$ $\times$ 56 $\times$ 14 $\times$ $^{84}/_3$ $=$ $^{1448832}/_{21}$ $=$ 68992 partes cúbicas.

El volúmen del cono (fig. 47) es : $^{22}/_7$ B C $\times$ $^1/_4$ B C $\times$ $^1/_3$ S O $=$ $^{22}/_7$ $\times$ 48 $\times$ 12 $\times$ $^{96}/_3$ $=$ $^{1216512}/_{21}$ $=$ 57929 $^1/_7$ partes cúbicas.

*El volúmen de un cono truncado ó de un tronco de cono se hallará restando del volúmen del cono total e del deficiente.*

94. *El volúmen de una esfera es igual al cubo de su diámetro multiplicado por el número* $^{11}/_{21}$.

Si querémos pues hallar el volúmen de una esfera que tenga 4 pies de diámetro lo harémos de este modo: $4^3 \times {}^{11}/_{21} = 4 \times 4 \times 4 \times {}^{11}/_{21} = 33\ {}^{11}/_{21}$ pies cúbicos ó sean 33 pies 905 pulgadas 246 [illegible]$/_7$ líneas cúbicas.

## Problemas prácticos relativos á la medicion de volúmenes.

1.° Propongámonos averiguar el número de cántaras de vino que contiene un lagar de forma paralelepípeda rectangular.

Por medio de un cordel medirémos lo largo y lo ancho: luego introducirémos en el lìquido una vara bien recta, ó mejor una barrita de plomo suspendida de un hilo y la sumergirémos hasta que toque al fondo del lagar; en este caso si ponemos una señal al punto del hilo que está en el nivel de la cara superior del lìquido tendrémos la profundidad de la masa lìquida.

Supongamos que la medicion nos dá las siguientes dimensiones: longitud = 14 pies, latitud = 9 y profundidad = 16; en este caso tendrémos 14 × 9 × 16 = 2016 pies cúbicos de vino en el lagar.

Ahora para reducir estos pies cúbicos á cántaras los reducirémos primero á pulgadas multiplicándolos por 1728 pulgadas cúbicas que tiene un pié cúbico, y el producto 3483748 pulgadas cúbicas lo dividirémos por 1289,6 pulgadas cúbicas que tiene una càntara. (*) El cociente 2701 $^{6384}/_{12986}$ indica el número de cántaras de vino que contiene dicho lagar.

---

(*) En la página 14 del tratado general de Cambios de D. Manuel Poy y Comes se halla una nota que dice así: « El señor de Peñalver observó que cuando el termómetro de Réaumur señalaba de 10 á 12 grados y el barómetro 30 $^1/_2$ pulgadas españolas; la cántara ó arroba de vino es capaz de contener 35 libras de agua destilada y equivale à un volúmen de 1289,6 pulgadas cúbicas.

La arroba mensual de aceite puede contener 27 $^1/_4$ de agua destilada y equivale á un volúmen de 1004 pulgadas cúbicas.

La media fanega es capaz de contener 60 $^1/_4$ libras de agua destilada y equivale á un volúmen de 2220 pulgadas cúbicas.»

Si querémos saber las cargas catalanas que componen estas cántaras las dividirémos por 8, porque una carga catalana es aproximadamente 8 cántaras castellanas. El cociente 337 que resulta despreciando su quebrado será aproximadamente el número de cargas de vino que contiene dicho lagar.

2.º Propongámonos construir en un recinto de 9 pies de largo y 7 de ancho un lagar capaz de contener 1000 cántaras de vino.

Desde luego vemos que el problema se reduce á determinar la profundidad del lagar.

Multiplicando las 1000 cántaras por 1289,6 pulgadas cúbicas que tiene una el producto 1289600 indicará la capacidad en pulgadas cúbicas que ha de tener el lagar.

*Dadas las dimensiones y la capacidad de un paralelepípedo se hallará la otra dimension partiendo la capacidad por el producto de las dos dimensiones conocidas.*

Aplicando esta regla á nuestro caso habrémos de dividir las 1289600 pulgadas por el producto 9072 de las dos dimensiones reducidas á pulgadas, y el cociente 143 pls. 3 ls. = 11 ps. 11 pls. 3 ls. es la profundidad que deberá tener el lagar.

3.º Propongámonos averiguar las arrobas castellanas de aceite que contiene un lagar de forma cilíndrica.

Primeramente medirémos el diámetro de la base y la profundidad. Supongamos que el diámetro es de 12 pies y la profundidad de 10: el volúmen será $12 \times {}^{22}/_{7} \times {}^{12}/_{4} \times 10 = 1131{,}4$ pies cúbicos: reducirémos estos pies á pulgadas cúbicas y tendrémos 195955,2 pulgadas, las cuales divididas por 1004 pulgadas cúbicas que tiene una arroba de aceite dan 195,2 que es el número de arrobas de aceite que tiene dicho lagar.

Siendo una arroba castellana de aceite 3 cuartanes catalanes próximamente tendrémos que el tal lagar contendrá unos 586 cuartanes.

4.º Propongámonos averiguar que profundidad deberá tener un lagar de 16 pies de diámetro para contener 150 arrobas de aceite.

En primer lugar multiplicarémos las 150 arrobas por 1004 y el producto 15060 será la capacidad en pulgadas cúbicas que debe tener el lagar: luego dividirémos estas pulgadas por $16 \times {}^{22}/_{7} = 201{,}1$ y el cociente 74 pls. 10 ls. = 6 ps. 2 pls. 10 ls. es la profundidad de dicho lagar.

5.º Propongámomos averiguar las *cántaras castellanas* de vino que puede contener una cuba determinada.

Una cuba puede considerarse como formada de dos conos truncados unidos por su base mayor. Lo que debemos procurar pues es medir la capacidad de uno de ellos y luego multiplicarla por 2 para tener la capacidad total de la cuba.

En primer lugar introducirémos una vara muy recta por el agugero del medio de la cuba cuidando de que baje en una direccion perpenpicular al centro del agujero hasta tocar al estremo opuesto del mismo agugero, y esta operacion nos dará la longitud del diámetro de las bases mayores de los dos conos: luego medirémos el diàmetro de las bases menores, lo que no ofrece ninguna dificultad: inmediatamente introducirémos por el agujero del grifon una vara muy recta, ó mejor si la cuba puede ponerse vertical, una barrita de plomo suspendida de un hilo, hasta tocar el fondo opuesto, cuya operacion nos dará la altura interna de la cuba. La mitad de esta altura es la altura de los dos conos truncados.

Supongamos que por medio de estas operaciones hallemos las dimensiones siguientes de nna cuba; diámetro del círculo del medio $=5$ pies, altura $=8$ pies, diámetro de los fondos $=3$ pies.

Tirarémos en el papel dos paralelas equidistantes entre si 4 partes de una escala cuyas partes representarán pies; harémos estas paralelas iguales la una á 5 pies y la otra á 3 y situadas de modo que una perpendicular á las dos una sus puntos medios: la paralela de 5 pies representará el diámetro de la base mayor del cono truncado de la cuba, la paralela de 3 pies represèntará el diámetro de la base menor del mismo cono y la perpendicular que une sus puntos medios la altura. Unirémos los èstremos de las dos paralelas por medio de dos rectas que prolongarémos por la parte de la paralela que representa el diámetro de la base menor hasta que se encuentren, y su punto de concurrencia será el vertice y la perpendicular que une los puntos medios de las bases del cono truncado prolongada hasta el mismo punto de concurrencia la altura del cono total.

Practicada esta operacion calcularémos el volúmen del cono total por la regla dada (93) separadamente el del cono deficiente, restarémos este volúmen del del cono total y la diferencia será la capacidad del cono truncado: multiplicarémos pues esta capacidad por 2 y tendremos la capacidad en pies cúbicos de la cuba las cuales reducirémos á cántaras del modo que hemos visto.

Si no se quiere emplear el método que acabamos de indicar podrá hacerse uso de esta fórmula

$$\text{Volúmen de tronco de con} = {}^{22}/_{7} \times {}^{1}/_{3}\, A\, (R^2 + Br + r^2)$$

en la que A representa la altura del tronco de cono, R el rádio de la base mayor y 1 el rádio de la base menor.

Hemos espuesto los dos métodos con el fin de hacer mas palpable la resulucion del problema; pero preferirémos hacer uso de la fórmula.

Por ella vamos á buscar la capacidad de la propuesta.

Siendo 8 pies la altura de la cuba el cono truncado que forma media cuba tendrá 4; el ràdio de la base mayor es ${}^{5}/_{2}=2,5$ y el rádio de la base menor es ${}^{3}/_{2}$ $=1,5$: sustituyendo estos valores á las letras que los representan tendrémos que la capacidad de media cuba será $^{22}/_{7} \times {}^{1}/_{3} \times 4\,(2{,}5^2 + 2{,}5 \times 1{,}5 + 15^{\,2}) =$ 51 ps. 576 pls. = 88904 pls. cúbicas, las cuales divididas por 1289,6 durán poco ménos de 68 cántaros: multiplicando éstas por 2 el producto 136 cántaras es la capacidad de la cuba entera. En Cataluña seria una cuba de 17 cargas.

## Reduccion de volùmenes.

95. Los cuerpos que tienen sus volúmeues iguales y no tienen una misma forma se llaman *equivalentes*; y los que estàn terminados por un mismo número de caras semejantes y cuyos àngulos poliedros homólogos son iguales en número y en cantidad se llaman semejantes.

96. La resolucion de los problemas de que nos vamos á ocupar relativamente à la reduccion de volúmenes se funda en la siguiente verdad:

*Los volúmenes de dos cuerpos semejantes son como el cubo de sus líneas homólogas.*

Si se tienen dos sólidos semejantes A B C D F G H Y J (fig. 37) y A′ B′ C′ D′ F′ G′ H′ Y′ J′ (fig. 48) que tengan A′ B′ = 2 A B, el volúmen del de la figura 48 es al de la figura 37 como 1 es à 8.

Problema. Construir un sólido de volúmen determinado y que sea semejante à otro cuerpo dado.

# Regla general.

1.° Mídase el volúmen del cuerpo dado y una de sus aristas. 2.° Multiplíquese el volúmen del cuerpo que se quiere construir por el cubo de la arista que se ha medido del cuerpo dado, y divídase el producto que salga por el volúmen del cuerpo dado: 3.° Del cociente que salga estràigase la raiz cúbica y se tendrà la magnitud de la arista del cuerpo que se ha de construir, homóloga á la que se ha medido del cuerpo dado. 4.° Multiplíquese cada arista del cuerpo dado por un quebrado cuyo numerador sea la arista encontrada del cuerpo que se busca homóloga à la medida del dado y el denominador la misma arista que se ha medido del cuerpo dado, y los productos seràn las magnitudes de las aristas del cuerpo que se ha de construir homólogas á sus respectivas del cuerpo dado. 5.° Conocido el valor de las aristas constrúyase la base como se ha visto y levántensele á sus respectivos puntos las aristas laterales cada cual de su respectiva magnitud y que formen los ángulos con el plano de la base iguales á los que forman sus homólogas del cuerpo dado con la suya. 6.° Unanse los estremos de las aristas de dos en dos por medio de rectas y quedará construido el cuerpo pedido.

1.° Construir un prisma semejante al de la figura 37, y que sea ocho veces mayor.

Tomando el prisma dado por unidad de medida dirémos que su volúmen es uno, y tomando tambien por uno la arista H Y tendrémos que el cubo de uno es el mismo uno, el cual multiplicado por el volúmen 8 del cuerpo que se ha de construir, da por producto el mismo 8, el cual dividido por el volúmen 1 del cuerpo dado da por cociente el mismo 8; estrayendo la raiz cúbica de este cociente 8 tendrémos por resultado 2 que es la magnitud de la arista del cuerpo que se ha de construir, homóloga á la H Y. Harémos pues todas las aristas del cuerpo que se ha de construir duplas de las del cuerpo dado. Construirémos la base G′ H′ J′ L′ (fig. 48) semejante á la G H J L (fig. 37) y que tenga el perímetro duplo (54 probl. 1°); y en los puntos G′, H′, J′, etc. levantarémos las G′ A′, H′ F′, J′ L′, etc. que formen ángulos iguales con la base à los que forman las G A, H F, J L, etc. con la suya; harémos G′ A′ = 2 G A, H′ F′ = 2 H F, etc. y unirémos los estremos A′, F′, D′, etc. por medio de las A′ F′, F′ D′, D′ C′, C′ B′, y B′ A′ con lo cual quedará formado el cuerpo pedido (fig. 48).

2.° Construir un cilindro semejante al de la figura 45 y que tenga 424285 partes cúbicas de la escala (fig. 27).

El volúmen del cilindro propuesto (fig. 45) es D F

$\times {}^{22}/_{7} \times {}^{1}/_{4}$ D F $\times$ C$l$ = 40 $\times {}^{22}/_{7} \times 10 \times 100$ = 125714 ${}^{2}/_{7}$; multiplicarémos el volúmen 424285 del cilindro pedido por el cubo de la altura del cilindro dado y tendrémos 424285000000, cuyo producto dividido por el volúmen 125714 del cilindro dádo tendrémos por cociente 3375002, cuya raiz cúbica es à poca diferencia 150, que es la magnitud de la altura del cilindro que se ha de construír: para hallar la magnitud del diámetro multiplicarémos el D F = 40 por ${}^{150}/_{100}$, y el producto 60 es la magnitud buscada. Con el diàmetro 60 constrúyase la base D′ E′ F′ (fig. 49), y en el centro $g'$ levàntese la $g'$ $e'$ que forme el ângulo $e'$ $g'$ F′ igual al $e$ $g$ F, y hàgase igual à la $e$g $\times$ ${}^{150}/_{100}$ = 104 $\times$ ${}^{150}/_{100}$ = 156; por el estremo $e'$ hagase pasar la A′ C′ paralela á la D′ F′ y hágase A′ $e'$ = D′ $g'$ y C′ $e'$ = F′ g′, y únase el punto A′ con el punto D′ y el C′ con el F′ por medio de las A′ D′ y C′ F′; con el radio $e'$ A′ trácese la base superior y quedará resuelto el problema.

3.° Construir un cono semejante al de la figura 46 y qne tenga 18329 partes cúbicas de la escala.

El volúmen del cono (fig. 46) es ${}^{22}/_{7}$ C B $\times$ ${}^{1}/_{4}$ C B $\times$ ${}^{1}/_{3}$ S A = ${}^{22}/_{7} \times 56 \times 14 \times {}^{84}/_{3}$ = 68992; multiplicando el volúmen 21149 del cono pedido por el cubo del diámetro C B de la base del cono dado y el producto que resulte lo dividirémos por el volúmen del cono dado; del cociente que nos dé esta division estraerémos la raiz cúbica y ésta será la magnitud del diàmetro de la base del cono pedido, la cual será poca diferencia de 36 partes. Con un diámetro igual 36 partes constrúyase la base C′ D′ B′ (fig. 50) y en el centro A′ levántese una perpendicular que por ser recto el cono, será el eje (84) y hágase este eje igual á S A × $^{36}/_{56}$ = 84 × $^{36}/_{56}$ = 54; únase el estremo S′ con los puntos C′ y B′ por modio de las S′ C′ y S′ B′ y quedará resuelto el problema.

## Problemas prácticos relativos á la reduccion de volùmenes.

1.° Buscar las dimensiones de un silo de base cuadrangular y de profundidad triple del lado de la base y que sea capaz de contener 487 fanegas castellanas de trigo.

Primeramente reducirémos la capacidad del silo cuyas dimensiones hemos de buscar á pulgadas cúbicas. Para esto multiplicarémos las 487 fanegas por el duplo de 2220 pls. cúbicas que tiene la media fanega y tendrémos 2162280 pls. cúbicas de capacidad.

Imaginémonos un silo de base cuadrangular cuyo lado sea de una pulgada y su profundidad 3: este silo cuyo volúmen es 3 pls. cúbicas será semejante al que se ha de construir. Ahora pues resolviendo esta pro–

porcion 3: 2162280::1.$^3$:6.$^3$ tendrémos por cuarto término 720760 que será el cubo del lado de la base del silo que se ha de construir: la raiz cúbica de este número es 89,7 que es el número de pulgadas que debe tener el lado de la base: multiplicando estas 89,7 pls. por 8 el producto 209,1 será el número de pulgadas que debe tener la altura.

El lado de la base del tal silo pues habrá de tener 89,7 pls. = 7 ps. 5,7 pls. y la altura 209,1 pls. = 17 ps. 5,1 pls.

2.° Propongámonos buscar las dimensiones de una caldera cilíndrica cuyo diametro sea los $^2/_5$ de la altura, y que sea capaz de contener 48 barrilones de agua.

48 barrilones son proximamente 192 cántaras castellanas las cuales multiplicadas por 1289,6 el proproducto 247603,2 es el número de pulgadas cúbicas que ha de tener la capacidad de la caldera.

Imaginémonos una caldera de 1 pié de diámetro y de altura 2,5 piés: el volúmen de esta caldera que es cemejante á la que se ha de construir será $1\ ^{22}/_7 \times {}^1/_4 \times 2,5 = 1\ ^{27}/_{28}$ pls. cúbicas: para obtener la magnitud del diámetro de la caldera cuyas dimensiones buscamos resolverémos esta proporcion $1\ ^{27}/_{28}$:247603,2:: $1^3$: x = 126052 y estrayendo la raiz cúbica de este cuarto término tendrémos 50,1 que es el número de pulgadas que debe tener el diámetro: multiplicando esta longitud por 2,5 el producto 125,25 es la longitud de la altura de la caldera.

3.° Propongamonos buscar la altura de la medida fanega cuya forma sea de un cono truncado, y que el diámetro de la base mayor sea de 12 pls. y el de la menor de 8.

Haciendo uso de la fórmula que hemos dado à conocer tendrémos $4440 = {}^{22}/_{7} \times {}^{1}/_{3}$ A $(12^2 + 12 \times 8 + 8^2)$ la cual nos dará A = 13 pls. 11 lins. 3 ps. que es la altura que debe tener la medida.

Sabiendo las dimensiones de la fanega podrémos buscar la de la cuartilla y del celemin semejantes á la fanega.

Para hallar las dimensiones de la cuartilla resolverémos esta proporcion. 4 (vol. de la fáng.): (vol. de la cuart.):: $12:^3$ x y del valor que salga para X estraerémos la raiz cúbica y tendremos el diámetro de la base mayor de la cuartilla: conociendo esta base hallarémos la otra por medio de esta proporcion: 12: *al diàmetro encontrado* :: 8 : y=*diámetro de la base menor*: y para obtener la altura resolverèmos esta otra 13: *al diámetro encontrado*;: 13 pls. 11 ls. 3 puns.: z = altura.

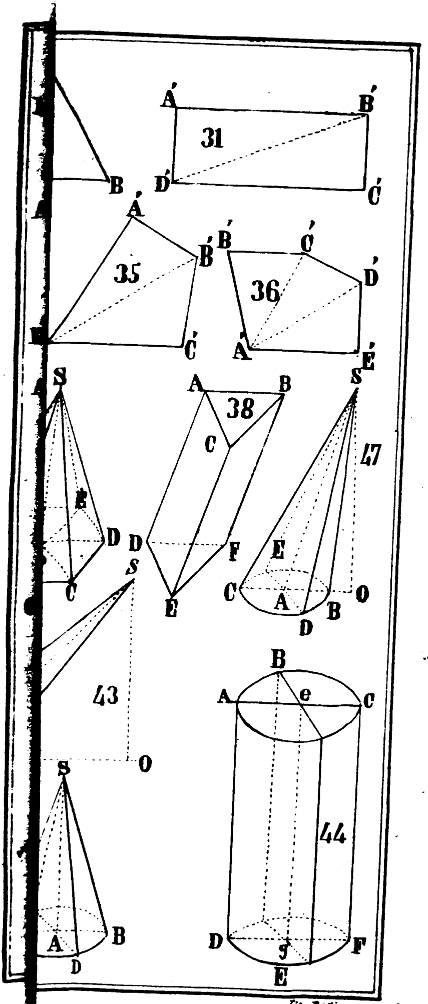
El mismo proceder se emplearà para hallar la dimensiones del celemin.

Repetimos que asi la reduccion de volúmenes como la de superficies, es de tanta importancia para las artes, que no podemos menos al concluir este compendio, de recomendar á los señores Profesores, que procuren adiestrar con repetidos problemas y ejemplos á sus discipulos en estas dos interesantes partes.

**FIN.**

# Erratas notables.

| *Pág.* | *Lín.ª* | *Dice* | *Léase* |
|---|---|---|---|
| 16 | 13 | línea | línea recta |
| 17 | 3 | *o* | 0 |
| 21 | 11 | *chg* | *ehg* |
| 27 | 22 | 8.º | 3.º |
| 38 | 8 | trazarémos | tirarémos |
| 41 | 12 | E D | C D (desde aquí hasta la línea segunda de la página 42 léase C en vez de E.) |
| 42 | 3 | de E á F de F á A | de D á E, de E á A |
| » | 4 | E, F, A, B | D, E, A, B |
| » | 5 | E F, F A | D E, E A |
| 44 | 21 | A B | A C |
| 49 | 3 | *af* | *ab* |
| 50 | 30 | imitadas | limitadas |
| 55 | 29 | basea | bases |
| 61 | 13 | 83 $^{15}/_{88}$ | 38 $^{14}/_{88}$ |


A' B' C' D' 31
A' B' C' 35
B' C' D' E' A' 36
S D C
A B C D E F 38
S E C A D B O 47
S O 43
S A B D
B A e C D F E g 44

Lit. Bottin.

Dos lineas q se cruzan